

Resolução de exercícios de EXTREMOS CONDICIONADOS

Docente: Rosário Laureano

Ano lectivo: 2013/14

Exercício 2.1 do Cad. 5 [n=2, m=1]: Determine os extremos da função f definida por $f(x,y)=4x^2+y^2-4xy$ sujeita à condição $2y-x=3$.

$$L(x,y,\lambda) = 4x^2 + y^2 - 4xy - \lambda \cdot (2y - x - 3)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 4y + \lambda = 0 \\ 2y - 4x + \lambda = 0 \\ -2y + x + 3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 16y - 24 - 4y + \lambda = 0 \\ 2y - 8y + 12 + \lambda = 0 \\ x = 2y - 3 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 12y = 24 - \lambda \\ -6y + 12 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 - \frac{\lambda}{24} \\ -12 + \frac{6\lambda}{24} + 12 + \lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{5}{4}\lambda = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 2 \\ \lambda = 0 \\ x = 1 \end{cases}$$

pt crítico $(1,2)$ por $\lambda = 0$

Matriz Hessiana reduzida:

$$H_f = \begin{bmatrix} 0 & (2y-x-3)'_x & (2y-x-3)'_y \\ -1 & 8 & -4 \\ 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$$

$m=2$
 $m=1$ $\Rightarrow m-m=1 \Rightarrow$ um só determinante, o de 1ª ordem

$$\Delta_3 = (-1)^1 \cdot \Delta_3 = -|H| = -(0+8+8-32-0-2) > 0 \Rightarrow (1,2)$$

é um mínimo condicionado

Exercício extra [n=3, m=2]: Determine os extremos da função f definida por $f(x,y,z)=x^2+2y-z^2$ sujeita às condições $x+y+z=6$ e $2x-y=5-z$.

Função Lagrangeana:

$$L(x,y,z,\lambda_1,\lambda_2) = x^2 + 2y - z^2 - \lambda_1(x+y+z-6) - \lambda_2(2x-y-5+z)$$

Os pontos críticos são as soluções do sistema:

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 = 0 \\ 2 - \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ -2z - \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \\ -x - y - z + 6 = 0 \\ -2x + y + 5 - z = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - \lambda_1 - 2\lambda_2 + 4 = 0 \\ \lambda_2 = \lambda_1 - 2 \\ -2z - \lambda_1 - \lambda_1 + 2 = 0 \\ -x - z + 6 = y \\ -2x - x - z + 6 + 5 - z = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3\lambda_1 - 4}{2} \\ z = \frac{2\lambda_1 - 2}{-2} = -\lambda_1 + 1 \\ -3x - 2z + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \frac{-9\lambda_1 + 12}{2} + 2\lambda_1 - 2 + 11 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ \text{---} \\ -\frac{5}{2}\lambda_1 = -15 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{18-4}{2} = 7 \\ \lambda_2 = 6-2 = 4 \\ z = -6+1 = -5 \\ \lambda_1 = \frac{-15}{-\frac{5}{2}} = \frac{30}{5} = 6 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 7 \\ \lambda_2 = 4 \\ z = -5 \\ y = -7+5+6 = 4 \\ \lambda_1 = 6 \end{cases}$$

Portanto, há um único pto crítico: $(7, 4, -5)$ para $\lambda_1 = 6$ e $\lambda_2 = 4$

) Matriz Hessiana Oculada

$$\overline{H}f(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{matrix} \leftarrow \text{condição } x+y+z=6 \\ \leftarrow \text{condição } 2x-y+z=5 \end{matrix}$$

$n=3$
 $m=2$ $\Rightarrow m-m=1 \Rightarrow$ usamos 1 só determinante principal (o de $>$ ordem: Δ_5)
 $\hookrightarrow$ colocamos $(-1)^m = (-1)^2 = 1$ como fator nesse determin.

Ponto $(7, 4, -5)$, a matriz Hessiana é $Hf(7, 4, -5) =$ oime

$$\Delta_5 = (-1)^2 \cdot \Delta_5 = 1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{e_2 = e_1 + e_2} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

T. Laplace (4ª linha)

$$= 1 \cdot (-1)^{1+4} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 1 & \boxed{1} & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix} \xrightarrow{L_2 = L_1 + L_2} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & -2 \end{vmatrix}$$

T. Laplace (3ª coluna)

$$= -1 \cdot (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - \begin{vmatrix} 0 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = - (0 + 0 + 0 - (8 + 0 - 18)) = -10$$

$\Delta_5 = -10 < 0 \Rightarrow (7, 4, -5)$ é um máximo em condição

O valor máximo é $f(7, 4, -5) = 7^2 + 2 \cdot 4 - (-5)^2 = 32$

O pto de máximo é $(7, 4, -5, 32)$.

$f(7, 4, -5)$

Exercício extra [n=3, m=1]: Determine os extremos da função f definida por $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ sujeita à condição $x^2 + y^2 + z^2 = 9$.

$$L(x, y, z, \lambda) = x - 2y + 2z - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 9)$$

$$\begin{cases} \frac{\partial L}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial y} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial z} = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 2x\lambda = 0 \\ -2 - 2y\lambda = 0 \\ 2 - 2z\lambda = 0 \\ -x^2 - y^2 - z^2 + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{-1}{-2\lambda} = \frac{1}{2\lambda} \\ y = \frac{2}{-2\lambda} = -\frac{1}{\lambda} \\ z = \frac{-2}{-2\lambda} = \frac{1}{\lambda} \\ -\frac{1}{4\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} + 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ -\frac{9}{4\lambda^2} = -9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ 4\lambda^2 = \frac{-9}{-9} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ - \\ \lambda^2 = \frac{1}{4} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{1} = 1 \\ y = -2 \\ z = 2 \\ \lambda = \frac{1}{2} \end{cases} \begin{cases} x = -1 \\ y = 2 \\ z = -2 \\ \lambda = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

pts críticos: $(1, 2, 2)$ para $\lambda = 1/2$
 $(-1, 2, -2)$ para $\lambda = -1/2$

Matriz Hessiana orlada

$$Hf = \begin{bmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{bmatrix}$$

$m=3$
 $m=1$ $\Rightarrow m-m=2 \Rightarrow$ usar os 2 determinantes de $>$ ordem

$\hookrightarrow$ colocar $(-1)^m = (-1)^1 = -1$ como fator hesses determin

$$\bar{A}_3 = (-1) \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix}$$

$$\bar{A}_4 = (-1)^1 \cdot |H|_{4 \times 4}$$

Ponto $(1, -2, 2)$ $\hookrightarrow Hf(1, -2, 2) = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -4 & 4 \\ 2 & -1 & 0 & 0 \\ -4 & 0 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$
 $\lambda = 1/2$

$$\bar{A}_3 = (-1)^1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & 2 & -4 \\ 2 & -1 & 0 \\ -4 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -[0 + 0 + 0 - (-16 + 0 - 4)]$$

$$= -20 < 0$$

$$\bar{A}_4 = (-1)^1 \cdot |Hf| = - \left(2(-1)^3 \begin{vmatrix} 2 & -4 & 4 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)(1)^4 \begin{vmatrix} 0 & -4 & 4 \\ -4 & -1 & 0 \\ 4 & 0 & -1 \end{vmatrix} \right)$$

T. Laplace (2ª linha) triângulos superiores

$$= -((-2)(2 \cdot (-1) \cdot (-1)) - (0 + 0 + 0 - (-16 - 16 - 0)))$$

$$= 4 + 32 = 36 > 0$$

$\bar{A}_3 < 0, \bar{A}_4 > 0 \Rightarrow (1, -2, 2)$ é um máximo
 $f(1, -2, 2) = 1 + 4 + 4 = 9 \Rightarrow$ valor máximo condicionado

Ponto $(-1, 2, -2)$ $\hookrightarrow Hf(-1, 2, -2) = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 4 & -4 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$
 $\lambda = -1/2$

$$\overline{\Delta}_3 = (-1)^1 \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -(0+0+0-(16+0+4)) = 20 > 0$$

$$\overline{\Delta}_4 = (-1)^1 \cdot |\overline{H}_f| = - \left(4 \cdot (-1)^4 \begin{vmatrix} -2 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \cdot (-1)^6 \begin{vmatrix} 0 & -2 & -4 \\ -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 1 \end{vmatrix} \right)$$

T. Laplace (3ª linha)

$$= - \left(4 \cdot (0+0+0-(0+0+4)) + (0+0+0-(16+0+4)) \right)$$

$$= 16 + 20 = 36 > 0$$

$\overline{\Delta}_3 > 0, \overline{\Delta}_4 > 0 \Rightarrow (-1, 2, -2)$ é um mínimo condicionado
 valor mínimo é $f(-1, 2, -2) = -1 + 4 - 4 = -9$