Resolução de exercícios de EXTREMOS LIVRES

Docente: Rosário Laureano **Ano lectivo: 2013/14**

Exercício 1.1.f) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por $f(x,y)= x^3+3xy^2-15x-12y$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2+3y^2-15=0 \\ 6xy-12=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{———} \\ y=\frac{2}{x} \quad (x\neq 0) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2+\frac{4}{x^2}-5=0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{x^4+4-5x^2}{x^2}=0 \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^4+4-5x^2=0 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2=\frac{5\pm\sqrt{25-16}}{2} \\ \text{———} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=1 \quad \vee \quad x^2=4 \\ \text{———} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ \text{—} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ \text{——} \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ \text{——} \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ \text{——} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=1 \\ y=\frac{2}{1}=2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=\frac{2}{-1}=-2 \end{cases} \vee \begin{cases} x=2 \\ y=\frac{2}{2}=1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-2 \\ y=\frac{2}{-2}=-1 \end{cases}$$

pontos críticos: $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ e $(-2,-1)$

? Existem pontos críticos da forma $(0,y)$? $\underline{(x=0)}$

Voltando ao sistema $\begin{cases} x^2+y^2-5=0 \\ xy-2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0+y^2-5=0 \\ 0-2=0 \ \text{(F)} \end{cases}$ Impossível

Assim, $(1,2)$, $(-1,-2)$, $(2,1)$ e $(-2,-1)$ são os únicos ptos críticos.

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & 6y \\ 6y & 6x \end{bmatrix}$$

$$H(1,2)=\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1=\det[6]=6>0 \\ \Delta_2=\det\begin{bmatrix} 6 & 12 \\ 12 & 6 \end{bmatrix}=36-144<0 \end{array} \Bigg\} \ \underline{\text{pto de sela}}$$

$$H(-1,-2)=\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1=\det[-6]=-6<0 \\ \Delta_2=\det\begin{bmatrix} -6 & -12 \\ -12 & -6 \end{bmatrix}=36-144<0 \end{array} \Bigg\} \ \underline{\text{ponto de sela}}$$

$$H(2,1)=\begin{bmatrix} 12 & 6 \\ 6 & 12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1=12>0 \\ \Delta_2=144-36>0 \end{array} \Bigg\} \ \underline{\text{ponto de mínimo}}$$

$$H(-2,-1)=\begin{bmatrix} -12 & -6 \\ -6 & -12 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{array}{l} \Delta_1=-12<0 \\ \Delta_2=144-36>0 \end{array} \Bigg\} \ \underline{\text{pto de máximo}}$$

Exercício 1.1.g) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por *f(x,y)=4*$^{1/y}$*ln(y)*.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4^{1/y}\cdot\frac{2x}{x^2}=0 \\ \ln(x^2)\,4^{1/y}\cdot\left(-\frac{1}{y^2}\right)\cdot\ln 4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \left.\begin{cases} \underbrace{4^{1/y}}_{\neq 0}\cdot\underbrace{\frac{2}{x}}_{\neq 0}=0 \\ -\frac{\ln 4}{y^2}\ln(x^2)\,4^{1/y}=0 \end{cases}\right] \underline{\text{Impossível}}$$

$\nexists$ pontos críticos de f

$\nexists$ extremos de f

Exercício 1.1.h) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por *f(x,y)=x*^{3}*-y*^{3}.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2=0 \\ -3y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=0 \\ y^2=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

pto crítico (único): $(0,0)$

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 6x & 0 \\ 0 & -6y \end{bmatrix} \text{ logo } H(0,0)=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta_1=0 \\ \Delta_2=0 \end{array}\right\rangle \underline{\text{Estudo local}}$$

$f(0,0)=0$ mas $\cancel{f(0.01,0.02)=(0.01)^3-(0.02)^3<0<f(0,0)}$

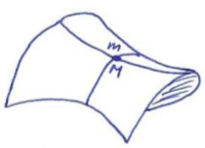
$\cancel{f(0.02,0.01)=(0.02)^3-(0.01)^3>0<f(0,0)}$.

Ver + geral em $\otimes$

$$f(0.01,-0.01)=(0.01)^3-(-0.01)^3=2\times(0.01)^3>0=f(0,0)$$
$$f(-0.01,0.01)=(-0.01)^3-(0.01)^3=-2\times(0.01)^3<0=f(0,0)$$

e qualquer vizinhança de (0,0) em raio superior a 0.01 inclui os pontos (0.01,-0.01) e (-0.01, 0.01).
Assim, conclui-se que (0,0) não é extremo de f
A função f não tem extremos.

Num ponto de sela (a,b), existem direcções de "acesso" a (a,b) em que f(a,b) é valor máximo e existem direcções de "acesso" a (a,b) em que f(a,b) é o "valor" mínimo. Qualquer vizinhança de (a,b) "contém" ambos os tipos de direcções referidos.



$\otimes$ $x^3-y^3=(x-y)(1+y+y^2)=(x-y)\overbrace{\left[\left(y+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right]}^{>0}$

$$\begin{array}{c|cccc} & 1 & 0 & 0 & -y^3 \\ y & & y & y^2 & y^3 \\ \hline & 1 & y & y^2 & \boxed{0} \end{array}$$

$\left.\begin{array}{l} \oplus \text{ se } x>y \\ \ominus \text{ se } x<y \end{array}\right\} \Rightarrow (0,0)$ é pto de sela

Exercício 1.2.a) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por *f(x,y)=4x²-12xy+9y²+36x-54y+90.*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 8x - 12y + 36 = 0 \\ -12x + 18y - 54 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ -2x + 3y - 9 = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - 3y + 9 = 0 \\ 2x - 3y + 9 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3y-9}{2} \\ x = \frac{3y-9}{2} \end{cases}$$

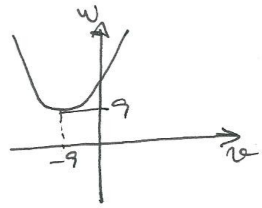
pontos críticos: família de pontos $\left(\frac{3y-9}{2}, y\right)$, $\forall y \in \mathbb{R}$, situados na recta $2x-3y+9=0$.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow H\left(\frac{3y-9}{2}, y\right) = \begin{bmatrix} 8 & -12 \\ -12 & 18 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 8 \\ \Delta_2 = 144-144 = 0 \end{array}\right\} \begin{array}{l} \text{Estudo} \\ \text{local} \end{array}$$

$$\begin{aligned} f(x,y) &= 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 36x - 54y + 90 \\ &= \underbrace{(2x-3y)^2}_{4x^2+9y^2-12xy} + 9(4x-6y) + 90 = (2x-3y)^2 + 18(2x-3y) + 90 \end{aligned}$$

Consideremos a parábola

$$\begin{aligned} w &= v^2 + 18v + 90 \\ w &= (v+9)^2 - 81 + 90 \\ w &= (v+9)^2 + 9 \end{aligned}$$



de vértice $(-9, 9)$.

Tem-se $\quad v^2 + 18v + 90 \geq 9 \quad, \forall v \in \mathbb{R}$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} f\left(\frac{3y-9}{2}, y\right) &= \left(2 \cdot \frac{3y-9}{2} - 3y\right)^2 + 18\left(2 \cdot \frac{3y-9}{2} - 3y\right) + 90 \\ &= (\cancel{3y} - 9 - \cancel{3y})^2 + 18(\cancel{3y} - 9 - \cancel{3y}) + 90 \\ &= 81 + 18 \times (-9) + 90 \\ &= 81 - 162 + 90 \\ &= 171 - 162 = \boxed{9} \end{aligned}$$

Então, de

$v^2 + 18v + 90 \geq 9$

Obtém-se $\boxed{f(x,y) \geq f\left(\frac{3y-9}{2}, y\right)}$, $\forall (x,y) \in D_f$

$\Downarrow$

a família de pontos críticos $\left(\frac{3y-9}{2}, y\right)$ é uma família de pontos de mínimo globais.

Exercício 1.2.b) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por $f(x,y)=(x-y)^2-x^4-y^4$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2(x-y)-4x^3=0 \\ -2(x-y)-4y^3=0 \end{cases} \underset{\text{adicionar}}{\Leftrightarrow} \begin{cases} 2(x-y)-4x^3=0 \\ -4x^3-4y^3=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ -x^3-y^3=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ x^3=-y^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_ \\ -x=y \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2(x+x)-4x^3=0 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x-4x^3=0 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x-x^3=0 \\ \_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x(1-x^2)=0 \\ \_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_ \end{cases} \vee \begin{cases} x^2=1 \\ \_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ \_\_\_ \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ \_\_\_ \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ \_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases} \vee \begin{cases} x=1 \\ y=-1 \end{cases} \vee \begin{cases} x=-1 \\ y=-(-1)=1 \end{cases}$$

pontos críticos: $(0,0)$, $(1,-1)$ e $(-1,1)$

$$H(x,y)=\begin{bmatrix} 2-12x^2 & -2 \\ -2 & 2-12y^2 \end{bmatrix}$$

$$H(0,0)=\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Delta_1=2>0 \\ \Delta_2=4+4=8>0 \end{matrix} \Bigg\} \text{ pto de mínimo}$$

$$H(1,-1)=\begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Delta_1=-8<0 \\ \Delta_2=64-4>0 \end{matrix} \Bigg\} \text{ pto de máximo}$$

$$H(-1,1)=\begin{bmatrix} -8 & -2 \\ -2 & -8 \end{bmatrix} \longrightarrow \begin{matrix} \Delta_1=-8<0 \\ \Delta_2=64-4>0 \end{matrix} \Bigg\} \text{ ponto de máximo}$$

Exercício 1.2.c) do Cad. 5: Determine os extremos locais (ou relativos) da função *f* definida por $f(x,y)=x^6+2x^3y+y^2-4x^3-4y+50$.

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x}=0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^5+6x^2y-12x^2=0 \\ 2x^3+2y-4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5+x^2y-2x^2=0 \\ x^3+y-2=0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \_\_\_\_ \\ y = 2 - x^3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^5 + x^2(2-x^3) - 2x^2 = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{x^5} + \cancel{2x^2} - \cancel{x^5} - \cancel{2x^2} = 0 \\ \_\_\_\_ \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = 0 \ \text{(V)} \\ y = 2 - x^2 \end{cases}$$ sistema possível e indeterminado

ptos críticos: a família (infinita) de pontos $(x, 2-x^3)$.

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} 30x^4 + 12xy - 24x & 6x^2 \\ 6x^2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$H(x, 2-x^3) = \begin{bmatrix} 30x^4 + 12x(2-x^3) - 24x & 6x^2 \\ 6x^2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30x^4 - \cancel{24x} - 12x^3 - \cancel{24x} & 6x^2 \\ 6x & 2 \end{bmatrix}$$

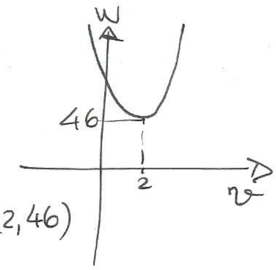
$$= \begin{bmatrix} 18x^4 & 6x^2 \\ 6x^2 & 2 \end{bmatrix} \longrightarrow \left.\begin{array}{l} \Delta_1 = 18x^4 > 0 \\ \Delta_2 = 36x^4 - 36x^4 = 0 \end{array}\right\} \ \underline{\text{Estudo local}}$$

$$f(x,y) = x^6 + 2x^3y + y^2 - 4x^3 - 4y + 50$$
$$= \underbrace{(x^3+y)^2}_{x^6 + 2x^3y + y^2} - 4(x^3+y) + 50$$

Consideremos a relação $\boxed{w = v^2 - 4v + 50}$

$w = (v-2)^2 + 46$

parábola de vértice $(2, 46)$



Tem-se $v^2 - 4v + 50 \geq 46, \ \forall v \in \mathbb{R}$.

Além disso, $f(x, 2-x^3) = \cancel{x^6 + 2x^3(}\,(\cancel{x^3} + 2 - \cancel{x^3})^2 - 4(\cancel{x^3} + 2 - \cancel{x^3}) + 50$
$= 4 - 8 + 50$
$= 46$

Assim, $f(x,y) = (x^3+y)^2 - 4(x^3+y) + 50 \geq f(x, 2-x^3), \ \forall (x,y)$

logo os pontos $(x, 2-x^3)$ são pontos de mínimo (globais)