

Optimização/Matemática II (Eco)

Exame: 2ª Época

1º Ano

2012 / 2013

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing, Gestão e Engenharia Industrial e Economia

12-06-2013

Duração: 2h 30 m

Nome: Número:
Curso: Turma:
Nome do docente:

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadoras
- Durante a prova, devem manter-se desligados os telemóveis
- Não se esclarecem dúvidas durante a prova
- Não destaque nenhuma folha do caderno de provas
- Apresente todas as justificações necessárias
- Escreva a tinta permanente ou a esferográfica.

1. Determine a primitiva de:

a) $[1,0 \text{ v}] \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$

$$P\left(\frac{\log(x)}{\sqrt{x}}\right) = P\left(\underbrace{\log(x)}_v \cdot \underbrace{x^{-1/2}}_{u'}\right) = 2x^{1/2} \ln(x) - P\left(2x^{1/2} \cdot \frac{1}{x}\right) =$$

$$u = P(u') = P(x^{-1/2}) = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} = 2x^{1/2}$$

$$v' = (\log x)' = \frac{x'}{x} = \frac{1}{x}$$

$$= 2x^{1/2} \ln(x) - 2 P\left(x^{-1/2}\right) =$$

$$= 2x^{1/2} \ln(x) - 2 \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{(-\frac{1}{2}+1)} = 2x^{1/2} \ln(x) - 4x^{1/2}$$

b) $[1,0 \vee] \frac{4x-2}{(x-1)(x^2+1)}$

F. racional própria

→ Decomposição:

$$\frac{4x-2}{(x-1)(x^2+1)} = \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow 4x-2 = A(x^2+1) + (Bx+C)(x-1)$$

$$\Leftrightarrow 4x-2 = Ax^2 + A + Bx^2 - Bx + Cx - C \Leftrightarrow 4x-2 = (A+B)x^2 + (C-B)x + (A-C)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ C-B=4 \\ A-C=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=-B \\ C=4+B \\ -B-4-B=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ -2B=-2+4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} - \\ - \\ -2B=2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} A=1 \\ C=4-1=3 \\ B=-1 \end{cases}$$

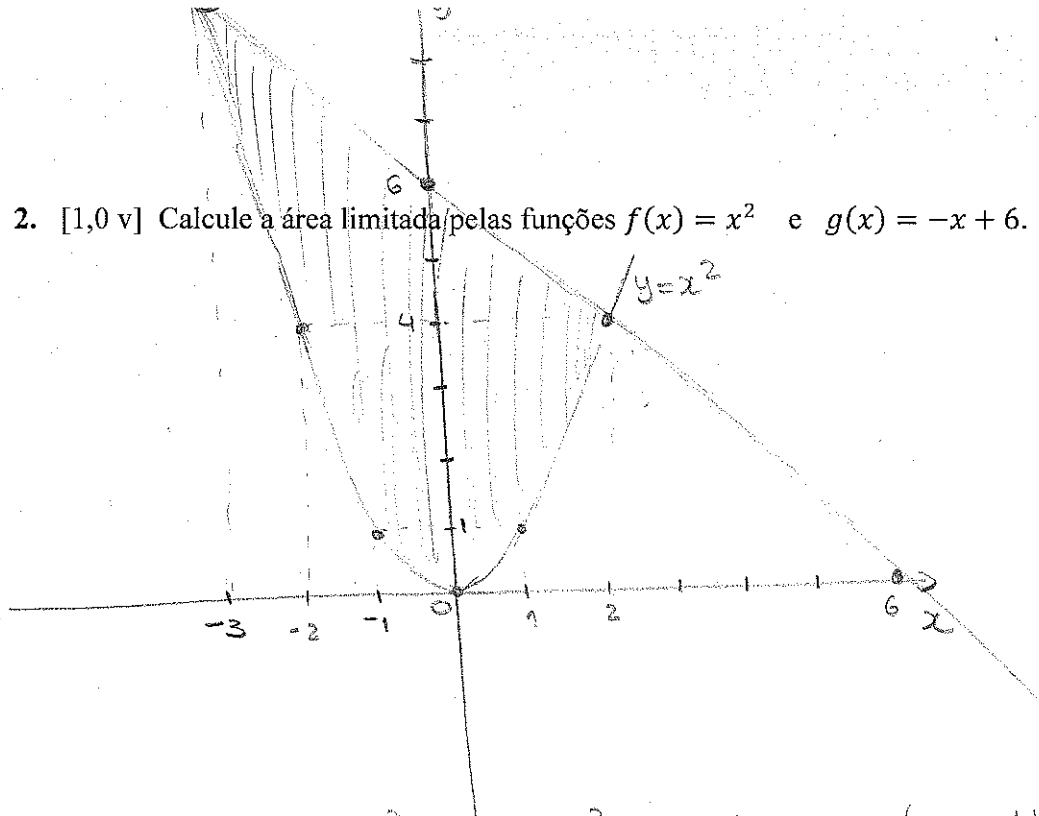
$$\rightarrow P\left(\frac{4x-2}{(x-1)(x^2+1)}\right) = P\left(\frac{1}{x-1}\right) + P\left(\frac{-x+3}{x^2+1}\right) =$$

$$= \ln|x-1| - P\left(\frac{x}{x^2+1}\right) + 3P\left(\frac{1}{x^2+1}\right) =$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2}P\left(\frac{2x}{x^2+1}\right) + 3 \operatorname{arctg}(x)$$

$$= \ln|x-1| - \frac{1}{2} \ln(x^2+1) + 3 \operatorname{arctg}(x)$$

2. $[1,0 \vee]$ Calcule a área limitada pelas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x + 6$.



x	$g(x) = -x + 6$
0	6
6	0
2	4
-3	9

$$\begin{aligned} \begin{cases} y = x^2 \\ y = -x + 6 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} -x + 6 = x^2 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ - \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 + 4 \times 6}}{2} \end{cases} \\ \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{-1 \pm 5}{2} \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x = 2 \vee x = -3 \end{cases} \end{aligned}$$

$$-3 \leq x \leq 2 \quad \text{e} \quad x^2 \leq y \leq -x + 6$$

$$\text{Área} = \int_{-3}^2 (-x + 6 - x^2) dx = \left[-\frac{x^2}{2} + 6x - \frac{x^3}{3} \right]_{-3}^2 =$$

$$= -\frac{(2)^2}{2} + 12 - \frac{(2)^3}{3} + \frac{(-3)^2}{2} - 6 \times (-3) + \frac{(-3)^3}{3} =$$

$$= -\frac{4}{2} + 12 - \frac{8}{3} + \frac{9}{2} + 18 - \frac{27}{3} = 28 + \frac{9}{2} - \frac{35}{3} = \frac{28 \times 6 + 27 - 70}{6} =$$

$$= \frac{168 + 27 - 70}{6} = \frac{125}{6}$$

3. Para calcular $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx$ siga os seguintes passos:

a) [1,5 v] Faça a substituição $x = \sin^4 y$ e verifique que

$$\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^3(x) \cos^2(x) dx$$

$$x = \frac{\sin^4(y)}{\varphi(y)}; \quad \varphi'(y) = 4 \sin^3(y) \cos(y); \quad \alpha = ? : \varphi(\alpha) = 0 \Leftrightarrow \sin^4 \alpha = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sin \alpha = \sqrt[4]{0} \Rightarrow \alpha = 0; \quad \beta = ? : \varphi(\beta) = 1 \Leftrightarrow \sin^4 \beta = 1 \Rightarrow \sin \beta = \sqrt[4]{1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \beta = \frac{\pi}{2}$$

$$\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1-\sqrt{\sin^4 y}} (4 \sin^3(y) \cos(y)) dy =$$

$$= \int_0^{\pi/2} \underbrace{\sqrt{1-\sin^2 y}}_{\cos(y)} (4 \sin^3(y) \cos(y)) dy = 4 \int_0^{\pi/2} \sin^3(y) \cos^2(y) dy$$

b) [0,5 v] Usando a identidade de fundamental da trigonometria verifique que

$$\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx = 4 \int_0^{\pi/2} \sin(x) \cos^2(x) - \sin(x) \cos^4(x) dx$$

$$4 \int_0^{\pi/2} \sin^3(y) \cos^2(y) dy = 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) \sin^2(y) \cos^2(y) dy =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) (1 - \cos^2(y)) \cos^2(y) dy =$$

$$= 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) (\cos^2(y) - \cos^4(y)) dy = 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) \cos^2(y) - \sin(y) \cos^4(y) dy$$

c.q.d.

c) [0,5 v] Usando a igualdade de alínea anterior calcule $\int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx$

$$\begin{aligned} \int_0^1 \sqrt{1-\sqrt{x}} dx &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) \cos^2(y) - \sin(y) \cos^4(y) dy = \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) \cos^2(y) dy - 4 \int_0^{\pi/2} \sin(y) \cos^4(y) dy = \\ &= -4 \left[\frac{\cos^3(y)}{3} \right]_0^{\pi/2} + 4 \left[\frac{\cos^5(y)}{5} \right]_0^{\pi/2} \\ &= -4 \frac{\cos^3(\pi/2)}{3} + 4 \frac{\cos^3(0)}{3} + 4 \frac{\cos^5(\pi/2)}{5} - 4 \frac{\cos^5(0)}{5} \\ &= 4 \times \frac{1}{3} - \frac{4}{5} = \frac{4}{3} - \frac{4}{5} = \frac{20-12}{15} = \frac{8}{15} \end{aligned}$$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y = xy^3$$

Eq. Dif. de Bernoulli
 $A(x) = 1$ $B(x) = x$ $m = 3$

a) [1,5 v] Determine o integral geral.

b) [0,5 v] Determine a solução particular para $y(0) = 1$.

4.a)

$$\hookrightarrow P((m-1)A(x)) = P((3-1) \times 1) = P(2) = 2x, \quad e^{P((m-1)A(x))} = e^{2x}$$

$$\hookrightarrow P\left(\frac{(1-m)B(x)}{e^{P((m-1)A(x))}}\right) = P\left(\frac{(1-3)x}{e^{2x}}\right) = P(-2xe^{-2x}) =$$

$$= P\left(\underbrace{x}_{N'} \cdot \underbrace{(-2e^{-2x})}_{u'}\right) = e^{-2x}x - P(e^{-2x}) = e^{-2x}x + \frac{1}{2}P(-2e^{-2x})$$

$$\begin{array}{|l} \cdot u = P(u') = e^{-2x} \\ N' = 1 \end{array}$$

$$= e^{-2x}x + \frac{1}{2}e^{-2x}$$

$$\hookrightarrow y^{1-3} = e^{2x} \times \left(e^{-2x}x + \frac{e^{-2x}}{2}\right) + C \times e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow y^{-2} = x + \frac{1}{2} + C \times e^{2x} \Leftrightarrow \frac{1}{y^2} = x + \frac{1}{2} + C e^{2x} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x + \frac{1}{2} + C e^{2x}} = y^2 \Rightarrow y = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + C e^{2x}}}$$

4.b) $y(0) = 1$

$$1^{-2} = 0 + \frac{1}{2} + C \times e^0 \Leftrightarrow 1 = \frac{1}{2} + C \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2}}$$

Sol. particular: $y = \frac{1}{\sqrt{x + \frac{1}{2} + \frac{e^{2x}}{2}}}$

5. [1,0 v] Estude a natureza da seguinte série numérica e calcule, se possível, a sua soma.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^2}{n(n+2)}$$

$$\frac{4}{n(n+2)} = \frac{A}{n} - \frac{A}{n+2} \Rightarrow 4 = A(n+2) - A(n)$$

$$\Rightarrow 4 = An + 2A - An \Rightarrow 4 = 2A \Rightarrow A = 2$$

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^2}{n(n+2)} = \sum_{n \geq 1} \left(\underbrace{\frac{2}{n}}_{u_n} - \underbrace{\frac{2}{n+2}}_{u_{n+2}} \right) \quad \text{Série de telescopia com } k=2$$

A série de telescopia é convergente se existir $\lim S_n$.

$$S_n = u_1 + u_2 - u_{n+1} - u_{n+2} =$$

$$= \frac{2}{1} + \frac{2}{2} - \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n+2} = 2 + 1 - \frac{2(n+2) - 2(n+1)}{(n+1)(n+2)} =$$

$$= 3 - \frac{(2n+4+2n+2)}{(n+1)(n+2)} = 3 - \frac{(4n+6)}{(n+1)(n+2)}$$

$$\lim S_n = 3 - \lim \frac{4n+6}{n^2+3n+2} = 3 - \lim \frac{\frac{4}{n} + \frac{6}{n^2}}{1 + \frac{3}{n} + \frac{2}{n^2}} = 3 - \frac{0}{1} = 3$$

Como $\exists \lim S_n$, a série é convergente e a soma da série é $S = \lim S_n = 3$.

6. [1,5 v] Determine, caso existam, os extremos livres da função real de duas variáveis reais:

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} + e^x - x - y$$

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x - 1 = 0 \\ y^2 - 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} e^x = 1 \\ y^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$H(x, y) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e^x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix}$$

$$H(0, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} D_1 = |1| = 1 > 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2 > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, 1) \text{ é minimizante}$$

$$H(0, -1) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} D_1 = |1| > 0 \\ D_2 = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} = -2 < 0 \end{array} \right\} \Rightarrow (0, -1) \text{ não é maximizante nem minimizante}$$

7. Considere o seguinte problema linear resultado da formalização dum jogo de soma nula

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= y \\ 4p_1 + 3p_2 &\leq y \\ 2p_1 + 3p_2 &\leq y \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1, p_2 &\geq 0, y \text{ livre} \end{aligned}$$

- a) [1,5 v] Defina a tabela de pagamentos e identifique para que jogador foi elaborada a formalização.

A formalização foi feita para o Jogador Redutor (Jog. B), cujo objectivo é minimizar a perda esperada

Tabela de Pagamentos:

		Jog. B	
		1	2
Jog. A	I	4	3
	II	2	3

- b) [1,5 v] Escreva o problema na forma normal e a primeira tabela do simplex (não efectue nenhuma iteração).

Min y

$$\text{s.a. } 4y_1 + 3y_2 - y \leq 0$$

$$2y_1 + 3y_2 - y \leq 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2, y \geq 0$$

Forma Normal

Min y

$$\text{s.a. } 4y_1 + 3y_2 - y + \lambda_1 = 0$$

$$2y_1 + 3y_2 - y + \lambda_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 = 1$$

$$y_1, y_2, y, \lambda_1, \lambda_2 \geq 0$$

1º quadro do simplex

Min $y + M u_3$

$$\text{s.a. } 4y_1 + 3y_2 - y + \lambda_1 = 0$$

$$2y_1 + 3y_2 - y + \lambda_2 = 0$$

$$y_1 + y_2 + u_3 = 1$$

$$y_1, y_2, y, \lambda_1, \lambda_2, u_3 \geq 0$$

$$(u_3 = 1 - y_1 - y_2)$$

$$Z = y + M - M y_1 - M y_2$$

	y_1	y_2	y	λ_1	λ_2	u_3	
λ_1	4	3	-1	1	0	0	0
λ_2	2	3	-1	0	1	0	0
u_3	1	1	0	0	0	1	1
$(-Z)$	-M	-M	1	0	0	0	-M

8. Na tabela seguinte encontra-se parcialmente representado um quadro do simplex dum problema linear.

a) [1,5 v] Justificando, preencha as células em falta e elabore uma iteração.

↓

	x	y	z	s ₁	t ₂	Z
x	1	-2	4	0	0	4
← A ₁	0	(1)	2	1	0	2
t ₂	0	3	6	0	1	6
Z	0	-4	-2	0	0	20
x	1	0	8	2	0	8
y	0	1	2	1	0	2
t ₂	0	0	0	-3	1	0
Z	0	0	6	4	0	12

2/1 = 2

6/3 = 2

- b) [0,5 v] A solução que obteve é ótima? Justifique.

Sim. A linha da q-o. é composta por coef. ≥ 0 .

9. Para a resolução do seguinte problema foi utilizado o *solver*, cujo o output se apresenta de seguida.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\ x_2 + x_3 &\geq 4 \\ -\frac{x_2}{2} + x_3 &\leq 0 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned}$$

Microsoft Excel 14.0 Answer Report

Worksheet: [exame_cálculos.xlsx]Sheet1

Report Created: 04-06-2013 14:19:56

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$K\$6	fo	0	30,66666667

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$H\$4	x	0	4	Contin
\$I\$4	y	0	2,666666667	Contin
\$J\$4	z	0	1,333333333	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$K\$10	Restrição 1	8	\$K\$10<=\$L\$10	Binding	0
\$K\$11	Restrição 2	4	\$K\$11>=\$L\$11	Binding	0
\$K\$12	Restrição 3	-2,22045E-16	\$K\$12<=\$L\$12	Binding	0

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report
Worksheet: [exame_cálculos.xlsx]Sheet1
Report Created: 04-06-2013 14:19:56

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$H\$4	x	4	0	4	1E+30	0,333333333
\$I\$4	y	2,666666667	0	3	0,5	1E+30
\$J\$4	z	1,333333333	0	5	1	2

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$K\$10	Restrição 1	8	4	8	1E+30	4
\$K\$11	Restrição 2	4	-0,333333333	4	4	4
\$K\$12	Restrição 3	-2,22045E-16	1,333333333	0	4	2

- a) [0,5 v] Indique a solução ótima do problema, incluindo os valores das variáveis de folga e/ou de excesso, e o valor ótimo.

Sol. ótima: $x_1 = 4$; $x_2 = 2,667$; $x_3 = 1,333$

$$s_1 = 8 - 8 = 0; \quad t_2 = 4 - 4 = 0; \quad s_3 = 0 - 0 = 0$$

Valor ótimo: $z = 30,667$

- b) [0,5 v] Se o termo independente da segunda restrição passasse de 4 para 5, qual o efeito no valor ótimo do problema? E se o da primeira se alterasse para 3?

1º caso:

$$b_2 = 4 \rightarrow b_2^N = 5$$

$$\text{I.S. para } b_2: [4 - 4, 4 + 4]$$

Como $b_2^N = 5 \in [0, 8]$, conclui-se q o preço sombra

$y_2 = -0,333$ continua válido. Logo o valor ótimo irá diminuir em 0,333. Novo valor ótimo: $z = 30,667 - 0,333 = 30,334$

I.S. para $b_1 = [8 - 4, 8 + \infty[$

$b_1^N = 3 \notin [4, +\infty[$, logo não é possível fazer análise de sensibilidade. Para saber o novo valor ótimo é necessário resolver o problema considerando $b_1 = 3$.

c) [1,0 v] Formule o dual e encontre a sua solução ótima.

Problema Primal

$$\text{Max } z = 4x_1 + 2x_2 + 5x_3$$

$$\text{s.a. } x_1 + x_2 + x_3 \leq 8 (w_1)$$

$$-x_2 - x_3 \leq -4 (w_2)$$

$$\frac{-x_2 + x_3}{2} \leq 0 (w_3)$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

Problema Dual

$$\text{Min } G = 8w_1 - 4w_2 + 0w_3$$

$$\text{s.a. } w_1 \geq 4$$

$$w_1 - w_2 - \frac{w_3}{2} \geq 2$$

$$w_1 - w_2 + w_3 \geq 5$$

$$w_1, w_2, w_3 \geq 0$$

Solução ótima do Dual:

$$w_1 = 4; w_2 = 0,333; w_3 = 1,333$$

Valor ótimo: $G^* = z^* = 30,667$ (T. da Dualidade)

10. Uma empresa comercializa três tipos de gelados, G1, G2 e G3 em quatro regiões distintas, R1, R2, R3 e R4. O stock para cada tipo de gelado é de 200 caixas e a procura estimado é de 100, 200, 140 e 160, respectivamente para as regiões R1, R2, R3 e R4. Os custos de distribuição (u.m./caixa) são os seguintes:

	R1	R2	R3	R4
G1	3	4	7	5
G2	7	4	3	2
G3	9	6	5	10

$m = 3$ origens

$n = 4$ destinos

i \ j	1	2	3
a _i	200	200	200

$\sum a_i = 600$

j \ i	1	2	3	4
b _j	100	200	140	160

$\sum b_j = 600$

Pretende-se um programa optimizado de fornecimento dos referidos produtos.

- a) [1,5 v] Formule este problema como um Problema de Transportes.

x_{ij} - caixas de gelados do tipo i enviadas para a região j
 $i = 1, 2, 3$; $j = 1, 2, 3, 4$

$$\text{Min } z = 3x_{11} + 4x_{12} + 7x_{13} + 5x_{14} + \dots + 9x_{31} + 6x_{32} + 5x_{33} + 10x_{34}$$

$$\text{s.a. } x_{i1} + x_{i2} + x_{i3} + x_{i4} = a_i, \quad i = 1, 2, 3$$

$$x_{1j} + x_{2j} + x_{3j} = b_j, \quad j = 1, 2, 3, 4$$

$$x_{ij} \geq 0 \quad i = 1, 2, 3 \\ j = 1, 2, 3, 4$$

- b) [0,5 v] Encontre uma solução inicial para o problema. Mét. do canto Noroeste

	R1	R2	R3	R4	a _i
G1	100	100	0	0	200 → 100 → 0
G2	0	100	100	0	200 → 100 → 0
G3	0	0	40	160	200 → 160 → 0
b _j	100 ↓ 0	200 ↓ 100 ↓ 0	140 ↓ 40 ↓ 0	160 ↓ 0	600

$$N^{\circ} \text{ de var. básicas: } m + n - 1 = 6 \\ \downarrow \quad \downarrow \\ 4 \quad 3$$

S.B.A. inicial: $x_{11} = 100$; $x_{12} = 100$; $x_{22} = x_{23} = 100$; $x_{33} = 40$ e $x_{34} = 160$

- c) [1,0 v] Avalie se a solução inicial é ótima. Caso não seja, proceda a uma iteração de otimização indicando qual a variável a entrar e a variável a sair.

Var. básicas

$$\begin{cases} u_1 + N_1 = 3 \\ u_1 + N_2 = 4 \\ u_2 + N_2 = 4 \\ u_2 + N_3 = 3 \\ u_3 + N_3 = 5 \\ u_3 + N_4 = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = 3 \\ N_2 = 4 \\ u_2 = 0 \\ N_3 = 3 \\ u_3 = 2 \\ N_4 = 8 \end{cases}$$

$u_1 = 0$

Var. não básicas

$$\begin{cases} \delta_{13} = 7 - 0 - 3 = 4 \geq 0 \\ \delta_{14} = 5 - 0 - 8 = -3 < 0 \\ \delta_{21} = 7 - 0 - 3 = 4 \geq 0 \\ \delta_{24} = 2 - 0 - 8 = -6 < 0 \\ \delta_{31} = 9 - 2 - 3 = 4 \geq 0 \\ \delta_{32} = 6 - 2 - 4 = 0 \geq 0 \end{cases} \rightarrow x_{24} \text{ é candidata a entrar na base} \\ \text{q o valor } \theta$$

	R_1	R_2	R_3	R_4	a_i
G_1	100	100			200
G_2		100	$100 - \theta$	θ	200
G_3			$40 + \theta$	$160 - \theta$	200
b_j	100	200	140	160	600

$$\begin{cases} 100 - \theta \geq 0 \\ 160 - \theta \geq 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \theta \leq 100 \\ \theta \leq 160 \end{cases} \therefore \theta = \min(100, 160) = 100$$

(x_{23} deixa de ser básica)

Nova S.B.A.:

$$x_{11} = x_{12} = x_{22} = 100; \quad x_{24} = 100; \quad x_{33} = 40 + 100 = 140; \quad x_{34} = \frac{160 - 100}{60}$$