ISCTE IUL

Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Optimização/Matemática II (Eco)

Exame: 2ª Época | 1º Ano | 2011 / 2012

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing, Gestão e Engenharia Industrial e Economia

12-06-2012

Duração: 2h 30m

Nome: Correcção .... Número: ....
Curso: .... Turma: ....
Nome do docente: ....

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadoras
- Durante a prova, devem manter-se desligados os telemóveis
- Não se esclarecem dúvidas durante a prova
- Não destaque nenhuma folha do caderno de provas
- Apresente todas as justificações necessárias
- Escreva a tinta permanente ou a esferográfica.

---

1. Calcule

   a) [1,0 v] $P\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

   b) [1,0 v] $P\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

a) $P\left(\dfrac{1-\cos(2x)}{2}\right) = P\left(\dfrac{1}{2}\right) - \dfrac{1}{2}P\cos(2x)$

$= \dfrac{1}{2}x - \dfrac{1}{4}\operatorname{sen}(2x) + C$

b) $P\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}} = P\left[e^{2x}\left(1-e^{2x}\right)^{-\frac{1}{2}}\right]$

$= -\dfrac{1}{2}\dfrac{\left(1-e^{2x}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C$

$= -\sqrt{1+e^{2x}} + C$

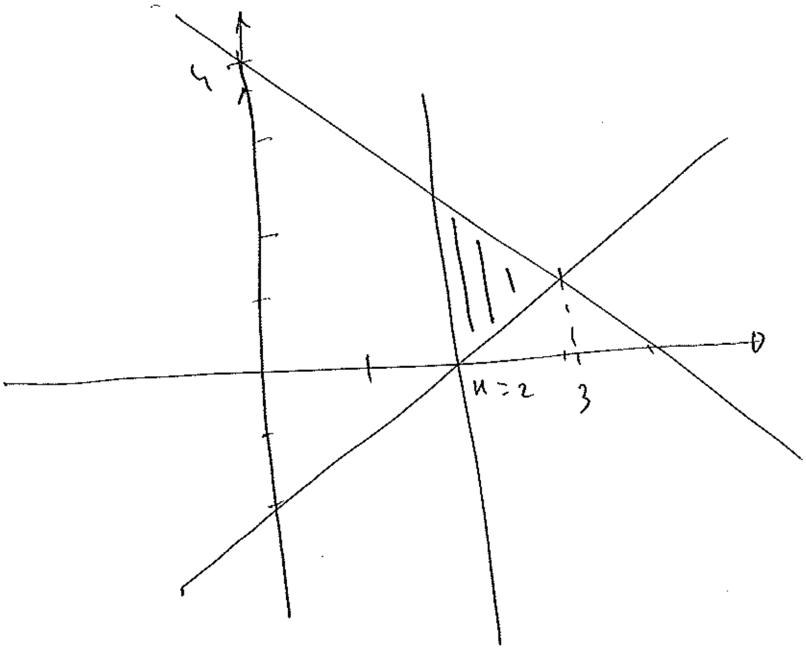
2. [1,0 v] Calcule o valor do integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sent}{\cos^2 t} dt$.

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} sent \cos^{-2} t \, dt = \left[\left(-\frac{1}{\cos t}\right)^{-1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\frac{1}{\cos\frac{\pi}{4}} + \frac{1}{\cos 0} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + 1$$ //

3. [1,0] Determine a área delimitada pelas seguintes rectas:

$$y \leq 4 - x \ , y \geq x - 2 \ e, \ x \geq 2$$



$$A = \int_2^3 (4-x) - (x-2) \, dx =$$

$$= \int_2^3 4 - 2x + 2 \, dx = \int_2^3 -2x + 6 \, dx$$

$$= \left[-2\frac{x^2}{2} + 6x \right]_2^3$$

4. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' = \frac{2x}{y} - y$$

a) [1,0 v] Determine o integral geral da equação.

b) [0,5 v] Determine a solução particular sujeita à condição $y(0) = 0$.

a) $y' = \frac{2x}{y} - y$

$y' + y = 2xy^{-1}$

$n = -1$

$e^{(-1-1)P(x)} = e^{-2x}$

$P \frac{2x}{e^{-2x}} = P\, 2x\, e^{2x}$

$= x e^{2x} - P\, e^{2x}$

$= x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}$

$y = \sqrt[2]{e^{-2x} \cdot 2\left(x e^{2x} - \frac{1}{2} e^{2x}\right) + C e^{-2x}}$

b) $y(0) = 0$

$0 = \sqrt[2]{C+1}$

$C = -1$

...

5. [2,0 v] Determine, caso existam, os extremos livres da função real de duas variáveis reais

$$f(x,y) = x^2 + y^3 - 3xy.$$

$$\begin{cases} f'_x = 0 \\ f'_y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ 3y^2 - 3x = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ 3y^2 - 3\left(\frac{3}{2}y\right) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} - \\ y^2 - \frac{3}{2}y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \\ y\left(y - \frac{3}{2}\right) = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ - \end{cases}$$

$$y = 0 \ \vee \ y = \frac{3}{2}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} y = \frac{3}{2} \\ x = \frac{9}{4} \end{cases}$$

$$H = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 6y \end{bmatrix}$$

$(x,y) = (0,0)$ $\quad H_1 = |2| = 2 > 0$

$$H_2 = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 0 \end{vmatrix} = -9 < 0 \Rightarrow$$

pt. sela

$(x,y) = \left(\frac{3}{2}, \frac{9}{4}\right)$ $\quad f''_{x^2} = 2 > 0$

$$|H| = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -3 & \frac{9}{4} \end{vmatrix} = \frac{9}{2} - 9 < 0$$

pt. sela

6. Considere o seguinte problema de Programação Linear

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,0 v] Escreva o quadro inicial do SIMPLEX.

b) [1,0 v] Diga, justificando, quais as variáveis básicas do quadro inicial bem como os seus valores e quais as variáveis que selecciona tanto para entrar como para sair da base, na primeira operação de condensação?

c) [1,5 v] Considere o seguinte quadro obtido após a realização de algumas iterações sobre o primeiro quadro do SIMPLEX:

	x_1	x_2	t_1	t_2	s_3	s_4	b_i
	1	0	-1	0	0	0	2
	0	1	1	-1/2	0	0	2
	0	0	0	1/2	1	0	4
	0	0	-1	1/2	0	1	0
Z	0	0	1	1/2	0	0	-6

Nota: t_1, t_2, s_3 e s_4 são as variáveis de excesso e de folga introduzidas nas quatro primeiras restrições

Indique a solução óptima e o valor óptimo dos problemas primal e dual, incluindo o valor das variáveis de folga e/ou excesso.

d) [0,5 v] Como classifica o tipo de solução encontrada para o primal? Justifique.

a)

		2	1	0	0	0	0	M	M	
		x_1	x_2	t_1	t_2	s_3	s_4	a_1	a_2	
M	a_1	1	0	-1	0	0	0	1	0	2 →
M	a_2	2	2	0	-1	0	0	0	1	8
0	s_3	1	1	0	0	1	0	0	0	8
0	s_4	0	1	0	0	0	0	0	1	2
		3M-2 ↑	2M-1	0	0	0	0	M	M	10M

b) Entra x_1, sai a_1

c) A sol é óptima!

Primal	Dual
$x_1 = 2$	$s'_1 = 0$
$x_2 = 2$	$s'_2 = 0$
$t_1 = 0$	$y_1 = 1$
$t_2 = 0$	$y_2 = 1/2$
$s_3 = 4$	$y_3 = 0$
$s_4 = 0$	$y_4 = 0$
$z = 6$	$G = 6$

d) Sol degenerada!

7. Considere o seguinte problema linear

$$
\begin{array}{ll}
\text{Max} & Z = 19x_1 + 17x_2 + 11x_3 \\
\text{s.a.} & 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 75 \\
 & 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 60 \\
 & 4x_1 + x_2 + x_3 \geq 50 \\
\text{E,} & x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Usando o Solver obtiveram-se os seguintes resultados:

Célula de Objectivo (Máximo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$G\$2		0	482.5

	Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
a) —▷	\$B\$2	x1	7.5	0	19	49	7.666666667
—▷	\$C\$2	x2	20	0	17	11.5	12.25
	\$D\$2	x3	0	-5.7	11	5.7	1E+30

	Célula Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
	Recurso 1	75	4.9	75	8.333333333	50
—▷	Recurso 2	55	0	60	1E+30	5
	Recurso 3	50	2.3	50	25	25

a) [0,5 v] Indique a solução óptima (incluindo o valor das variáveis de folga e de excesso) e o valor óptimo.
b) [0,5 v] Indique, justificando, quais as variáveis básicas e as não-básicas.
c) [1,0 v] O que representa o preço sombra do recurso 1 e cujo valor é 4,9.
d) [1,0 v] Para a variável x3 e de acordo com o output do Solver, o valor do seu coeficiente poderá decrementar indefinidamente. Como interpreta esta informação?

b) . . .

c) preço sombra representa o lucro por acréscimo marginal do recurso (em 1 unidade)

d) se p/ $c_3 = 11$, x_3 não faz parte da solução óptima de maximização, muito menos fará se se decrescer o valor de c_3.

8. Considere um problema particular de transporte com os seguintes custos associados, disponibilidades nas origens e requisitos nos destinos:

Dest.→ / Origens↓	Custos				Disponibilidades na origem
	A	B	C	D	
1	6	4	5	4	60
2	7	6	7	3	30
3	8	7	6	9	100
Procura no destino	30	50	40	70	

a) [1,0 v] Formule-o como um problema de Programação Linear
b) [1,0 v] Encontre uma solução inicial para o problema.
c) [1,0 v] Avalie se a solução inicial é óptima. Caso não seja, proceda a uma iteração de optimização indicando qual a variável a entrar e, a variável a sair.

a) $\text{Min } z = 6x_{11} + 4x_{12} + 5x_{13} + 4x_{14} + 7x_{21} + 6x_{22} + 7x_{23} + 3x_{24} + 8x_{31} + 7x_{32} + 6x_{33} + 9x_{34}$

s.a.

$x_{11} + x_{12} + x_{13} + x_{14} = 60$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} + x_{24} = 30$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} + x_{34} = 100$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 30$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 50$

$x_{13} + x_{32} + x_{33} = 40$

$x_{14} + x_{24} + x_{34} = 70$

$x_{ij} \geq 0, \quad i = 1 \ldots 3 \quad e \quad j = 1 \ldots 4$

b)

	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	$\boxed{6}$ 30	$\boxed{4}$ 30	$\boxed{5}$	$\boxed{4}$	60
O_2	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$ 20	$\boxed{7}$ 10	$\boxed{3}$	30
O_3	$\boxed{8}$	$\boxed{7}$	$\boxed{6}$ 30	$\boxed{9}$ 70	100
	30	50	40	70	

Northwest Corner

Sol. inicial: $x_{11} = 30$; $x_{12} = 30$; $x_{22} = 20$; $x_{23} = 10$; $x_{33} = 30$;
$x_{34} = 70$

$z = \ldots$

c)

$u_1 + v_1 = 6$ fazendo $v_1 = 0$

$u_1 + v_2 = 4$

$u_2 + v_2 = 6$

$u_2 + v_3 = 7$

$u_3 + v_3 = 6$

$u_3 + v_4 = 9$

$u_1 = 6$

$6 + v_2 = 4 \Leftrightarrow v_2 = -2$

$u_2 - 2 = 6 \Leftrightarrow u_2 = 8$

$8 + v_3 = 7 \Leftrightarrow v_3 = -1$

$u_3 + (-1) = 6 \Leftrightarrow u_3 = 7$

$7 + v_4 = 9 \Leftrightarrow v_4 = 16$

$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_1 = 5 - 0 - 6 = -1$

$\delta_{14} = c_{14} - u_1 - v_4 = 4 - 6 - 16 = -18$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 7 - 8 - 0 = -1$

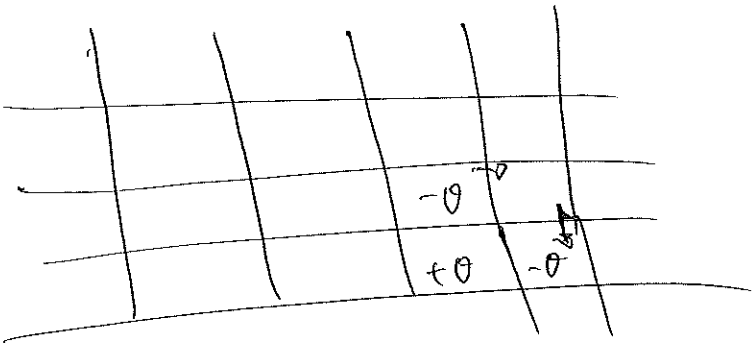
$\delta_{24} = c_{24} - u_2 - v_4 = 3 - 8 - 16 = -21$

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 8 - 7 - 0 = 1$

$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 7 - 7 - (-2) = 2$

A sol. ñ é óptima. P_1 ?

A var a entrar é x_{24}



	D_1	D_2	D_3	D_4	
O_1	30	30			60
O_2		20	0	10	30
O_3			40	60	100
	30	50	40	70	

A var a sair é x_{23}

9. Considere o jogo de soma nula com dois jogadores e a seguinte tabela de *pay-off*:

		B	
A	4	2	5
	1	8	3

a) [0,5 v] Mostre que o jogo não é estável.

b) [0,5 v] Averigúe se existem estratégias dominadas para cada um dos jogadores.

c) [0,5 v] Formalize o jogo como um problema em programação linear para o jogador A e para o jogador B.

d) [1,0 v] Resolva o jogo graficamente para o jogador B, indicando o seu valor e as estratégias mistas óptimas.

a)

		B		
A	4	2	5	2
	1	8	3	1
	4	8	5	

Max(1, 2) = 2

Min(4, 8, 5) = 4.

o jogo é ñ estável

b) B_1 domina B_3 (Min. perdas máximas)

E, por fim,

		B
A	4	2
	1	8

c) Jogador A

Max g

$4p_1 + p_2 \geq g$

$2p_1 + 8p_2 \geq g$

$p_1 + p_2 = 1$

$p_1, p_2 \geq 0$

Jogador B

Min g

$4q_1 + 2q_2 \leq g$

$q_1 + 8q_2 \leq g$

$q_1 + q_2 = 1$

$q_1, q_2 \geq 0$

d)

$$\begin{cases} 4q_1 + 2q_2 = g \\ q_1 + 8q_2 = g \end{cases}$$

$q_2 = 1 - q_1$

$$\begin{cases} 4q_1 + 2(1-q_1) = g \\ q_1 + 8(1-q_1) = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} 4q_1 + 2 - 2q_1 = g \\ q_1 + 8 - 8q_1 = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + 2 = g \\ -7q_1 + 8 = g \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2q_1 + 2 = -7q_1 + 8 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} 9q_1 = 6 \\ q_1 = \frac{6}{9} = \frac{2}{3} \end{cases}$$

$$\begin{cases} q_2 = \frac{1}{3} \\ g = 10/3 \end{cases}$$