ISCTE IUL

Instituto Universitário de Lisboa

Lisbon University Institute

OPTIMIZAÇÃO/MATEMÁTICA II

Licenciaturas de Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Gestão de Marketing e Economia

Exame da 2.ª fase

19 de Junho de 2010 Ano Lectivo 2009/2010

Nome CORRECÇÃO Número ....

Curso .... Turma ....

Nome do docente ....

Aviso:

- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Formulário disponível no final do enunciado.
- Não são esclarecidas dúvidas durante a prova.
- Não são permitidos telemóveis ligados.
- Não destacar nenhuma folha do caderno de prova.
- Apresente sempre todas as justificações necessárias.

1V 1. Calcule uma primitiva para a seguinte função $f(x)$:

$$f(x) = \arcsin(x)$$

$P[\arcsin x \cdot 1] = x \arcsin x - P \dfrac{x}{\sqrt{1-x^2}} =$

$u' = 1$

$v = \arcsin x$

$v' = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$

$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$

1V 2. Calcule o seguinte integral definido:

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

$P\left[\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\right] = P\left[\dfrac{A}{\underset{(x+1)^2}{x}} + \dfrac{B}{\underset{x(x+1)}{x+1}} + \dfrac{C}{\underset{x}{(x+1)^2}}\right]$

$A(x^2+2x+1) + Bx(x+1) + Cx = x^2+1$

$Ax^2 + 2Ax + A + Bx^2 + Bx + Cx = x^2+1$

$x^2(A+B) +$

$+ x(2A+B+C) +$

$+ A = x^2+1$

$\begin{cases} A = 1 \\ 2A+B+C = 0 \\ A+B = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ 2+C = 0 \end{cases}$ $\begin{cases} A = 1 \\ B = 0 \\ C = -2 \end{cases}$

$P\left[\dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\right] =$

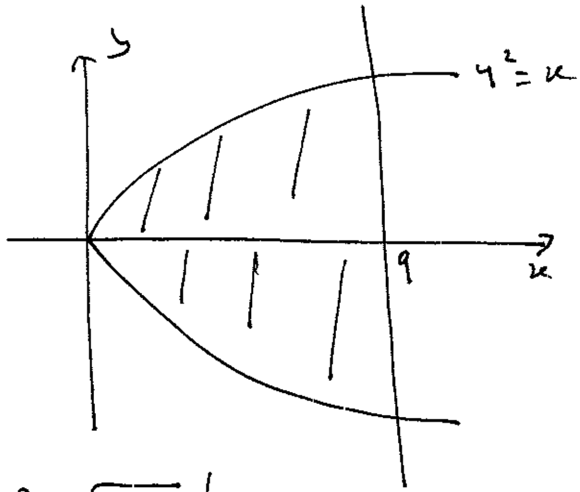
$P\left[\dfrac{1}{x} + \dfrac{-2}{(x+1)^2}\right] =$

$\log x + \dfrac{2}{x+1}$

$\int_1^2 \dfrac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx = \left[\log x + \dfrac{2}{x+1}\right]_1^2 =$

$= \left(\log 2 + \frac{2}{3}\right) - \left[\log 1 - \frac{2}{2}\right]$

$= \log 2 + \frac{5}{3}$ //



1,5 ✓ 3. Calcule a área definida por $y^2 \leq x \leq 9$.

$$\text{Área} = 2 \int_0^9 \sqrt{x}\, dx$$

$$= 2 \left[\left[\frac{2}{3} x^{\frac{3}{2}} \right]_0^9 \right] = 2 \left\{ \frac{2}{3} \sqrt{9^3} \right\}$$

$$= 36$$

4. Estude a natureza das seguintes séries e calcule a soma sempre que possível:

1 ✓ a) $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{2^{n+2}}$

1 ✓ b) $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{n^3 + n^2 + 5}{5n^2 - 1} \right)$

a) $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{2^{n+2}} = \sum_{n\geq 2} \frac{2}{4 \cdot 2^n} = \frac{1}{2} \sum_{n\geq 2} \frac{1}{2^n}$

É 1 série geométrica, pois $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$,

a soma dela é:

$$S = \frac{1}{2} \frac{a_2}{1-r} = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{4} \cdot \frac{2}{1} \right) = \frac{1}{4}$$

b) $\lim \frac{n^3 + n^2 + 5}{5n^2 - 1} = +\infty$, como $a_n \not\to 0$, logo a série é divergente.

5. Considere a equação diferencial $x^3 yy' = (2-x^2)+(2-x^2)y^2$

1,5 ✓ a) Determine o integral geral.

0,5 ✓ b) Determine a solução particular para $y(1)=1$

a) $x^3 y \cdot y' = (2-x^2)(1+y^2) \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{y}{1+y^2} dy = \dfrac{2-x^2}{x^3} dx \Rightarrow$

$\Rightarrow \displaystyle\int \frac{y}{1+y^2} dy = \int \frac{2-x^2}{x^3} dx \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \log|1+y^2| = \displaystyle\int \frac{2}{x^3} dx - \int \frac{1}{x} dx$

$\Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \log|1+y^2| = -\dfrac{1}{x^2} - \log|x| + C$ //

b) $y(1)=1$

$\dfrac{1}{2} \log|1+1^2| = -\dfrac{1}{1} - \log|1| + C$

$\dfrac{1}{2} \log 2 = -1 + C \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow C = \dfrac{1}{2} \log 2 + 1$

A sol. particular será

$\dfrac{1}{2} \log|1+y^2| = -\dfrac{1}{x^2} - \log|x| + 1 + \dfrac{1}{2} \log 2$ //

6. Um consumidor tem a seguinte função de utilidade:

1,5V $$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \ln y$$

Sabendo que o preço do bem x é 4 euros e o do bem y é 2 euros, calcule o óptimo do consumidor tendo em conta que o seu orçamento exacto para os bens x e y é de 10 euros. Justifique a sua resposta.

$L(x, y, \lambda) = \frac{x^2}{2} + \ln y + \lambda(4x + 2y - 10)$

uma vez $\bar{p}$ $U(x,y) = \frac{x^2}{2} + \ln y$ e

$\varphi(x,y) = 4x + 2y = 10$

$$\begin{cases} L'_x = 0 \\ L'_y = 0 \\ L'_\lambda = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x + 4\lambda = 0 \\ \frac{1}{y} + 2\lambda = 0 \\ 4x + 2y - 10 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} x = -4\lambda \\ y = -\frac{1}{2\lambda} \\ -16\lambda - \frac{1}{\lambda} - 10 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} = \\ = \\ 16\lambda^2 + 10\lambda + 1 = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} = \\ \lambda = -\frac{1}{2} \vee \lambda = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$\bar{s}$ dois pontos: $(2, 1, -\frac{1}{2})$ e $(\frac{1}{2}, 4, -\frac{1}{8})$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & L''_{x^2} & L''_{xy} \\ \varphi'_y & L''_{xy} & L''_{y^2} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{y^2} \end{vmatrix}$$

p/ o ponto $(2, 1, -\frac{1}{2})$

$$\bar{H} : \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = -(4 - 16) = +12$$

(é um máximo)

logo óptimo é o consumo de 2 u. de x e 1 u. de y.

p/ o ponto $(\frac{1}{2}, 4, -\frac{1}{8})$

$$\bar{H} = \begin{vmatrix} 0 & 4 & 2 \\ 4 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & -\frac{1}{16} \end{vmatrix} = -(4 - 1) = -3$$

(é um mínimo)

7. Considere o seguinte problema de programação linear:

Min. $8x_1 + 6x_2 + 10x_3$

s.a. $\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$

1,5V a) Formule o problema dual.

1,5V b) Apresente a solução óptima do primal e do dual.

a) Max $W = 2w_1 + w_2$

suj a
$2w_1 + 4w_2 \leq 8$
$w_1 + 3w_2 \leq 6$
$w_1 + 5w_2 \leq 10$
$w_1, w_2 \geq 0$

b)

	w_1	w_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	2	4	1	0	0	8 →
s_2	1	3	0	1	0	6
s_3	1	5	0	0	1	10
	-2	-1	0	0	0	0
	↑					

	w_1	w_2	s_1	s_2	s_3	
w_1	1	2	$\frac{1}{2}$	0	0	4
s_2	0	1	$-\frac{1}{2}$	1	0	2
s_3	0	3	$-\frac{1}{2}$	0	1	6
	0	3	1	0	0	8

Sol. óptima do dual

$w_1 = 4$, $w_2 = 0$
$s_2 = 2$
$s_1 = 0$
$s_3 = 6$
e $W = 8$

Sol. óptima do primal

$x_1 = 1$ $x_2 = 0$
$t_2 = 3$ $x_3 = 0$
$z = 8$ $t_1 = 0$

8. Considere o seguinte problema de PL:

Min. $Z = 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2$

Suj. a $0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \leq 2{,}7$

$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 6$

$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \geq 6$

$x_1, x_2 \geq 0$

E, os *outputs* do Solver do Excel são os seguintes:

Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
F3	Z	0	5,25

Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
B3	x1	7,5	0	0,4	0,1	1E+30
C3	x2	4,5	0	0,5	1E+30	0,1

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
D5		2,7	-0,5	2,7	0,9	0,3
D6		6	1,1	6	7,5	0,5
D7		6,3	0	6	0,3	1E+30

1,5V a) Explicite a solução óptima do problema, indicando quais as variáveis básicas e as não básicas, bem como os valores das variáveis de excesso e de folga e o valor óptimo.

1,5V b) Indique quais as consequências para a solução do problema caso o termo independente da primeira restrição passe a ser 3. Se o valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

a) Último quadro (ignorar a v. artificial p/ o efeito)

	x_1	x_2	s_1	t_3	
x_1					7,5
x_2					4,5
t_3					0,3
z	0	0	0,5	0	5,25

a solução é v. básicas $\begin{cases} x_1 = 7{,}5 \\ x_2 = 4{,}5 \\ t_3 = 0{,}3 \end{cases}$

$z = 5{,}25$

v. n básicas $\{ s_1 = 0$

Não há folga do recurso 1 p/ R_1 LE $-$ R_1 LD $= 0$

b) $b_1 = 2{,}7$, se $b_1' = 3$ dado $\bar{p}$

$2{,}7 - 0{,}3 < b_1 < 2{,}7 + 0{,}9$, a restrição mantém-se activa

Novo Z $= 5{,}25 + (0{,}3) \times (-0{,}5)$

$=$ Lucro $+ (\Delta LDR_1) \cdot$ Preço Sombra R_1

$= 5{,}10$

9. Considere o seguinte problema:

Min. $9x_{11} + 8x_{12} + 10x_{13} + 2x_{21} + 4x_{22} + 5x_{23} + 4x_{31} + 9x_{32} + 6x_{33}$

s.a. $x_{11} + x_{12} + x_{13} = 10$

$x_{21} + x_{22} + x_{23} = 20$

$x_{31} + x_{32} + x_{33} = 15$

$x_{11} + x_{21} + x_{31} = 5$

$x_{12} + x_{22} + x_{32} = 20$

$x_{13} + x_{23} + x_{33} = 20$

$x_{11}, x_{12}, x_{13}, x_{21}, x_{22}, x_{23}, x_{31}, x_{32}, x_{33} \geq 0$

1,5✓ a) Determine uma solução inicial.

1,5✓ b) Investigue se a solução obtida em a) é óptima. Caso não seja, melhore-a.

a)

	D_1	D_2	D_3	
S_1	$\boxed{9}$ 5	$\boxed{8}$ 5	$\boxed{10}$	10
S_2	$\boxed{2}$	$\boxed{4}$ 15	$\boxed{5}$ 5	20
S_3	$\boxed{4}$	$\boxed{9}$	$\boxed{6}$ 15	15
	5	20	20	45

(Sol. inicial pelo método do canto noroeste)

n = v. básicas: $n + m - 1$

$= 3 + 3 - 1$

$= 5$

$z = 9.5 + 8.5 + 4.15 + 5.5 + 6.15 = 260$

b)

v. básicas

$u_1 + v_1 = 9$

$u_1 + v_2 = 8$

$u_2 + v_2 = 4$

$u_2 + v_3 = 5$

$u_3 + v_3 = 6$

Fazendo $u_1 = 0$

$v_1 = 9$

$v_2 = 8$

$u_2 + 8 = 4 \Leftrightarrow u_2 = -4$

$-4 + v_3 = 5 \Leftrightarrow v_3 = 9$

$u_3 + 9 = 6 \Leftrightarrow u_3 = -3$

v. n-básicas

$\delta_{13} = c_{13} - u_1 - v_3 = 10 - 0 - 9 = 1$

$\delta_{21} = c_{21} - u_2 - v_1 = 2 - (-4) - 9 = -3$ ←

$\delta_{31} = c_{31} - u_3 - v_1 = 4 - (-3) - 9 = -2$

$\delta_{32} = c_{32} - u_3 - v_2 = 9 - (-3) - 8 = 4$

	10		10
5	10	5	20
		15	15
5	20	20	

Nova sol. $z = 245$

$x_{21} = 5$

$x_{12} = 10$

$x_{22} = 10$

$x_{23} = 5$

$x_{33} = 15$

10. Considere o seguinte jogo de 2 jogadores de soma nula:

		Jogador B		
		I	II	III
	1	-3	-2	7
Jogador A	2	1	0	2
	3	5	-3	-4

A√ a) Verifique se o jogo é estável. Se sim, qual o valor do jogo?

A√ b) Formule-o em Programação Linear para o jogador A.

a)

-3	-2	7		-3
1	0	2		0
5	-3	-4		-4
5	0	7		

Max(-3, 0, -4) = 0

Min(5, 0, 7) = 0

o jogo é estável, o valor é zero (0).

b) Max g

suj. a $-3p_1 + p_2 + 5p_3 \geq g$

$-2p_1 - 3p_3 \geq g$

$7p_1 + 2p_2 - 4p_3 \geq g$

$p_1 + p_2 + p_3 = 1$

$p_1, p_2, p_3 \geq 0$

g livre