ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Optimização / Matemática II

Frequência / 1º Exame — 1º Ano – 2º Semestre — 2012 / 2013

Licenciaturas de Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing, Gestão e Engenharia Industrial e Economia

27-05-2013

Frequência: 1h 15m + 15 m
Duração Exame: 2h 30m + 30 m

Nome: .... Número: ....
Curso: .... Turma: ....
Nome do docente: ....

Alunos em Frequência: resolver apenas as questões de 6. a 12. da prova.
Alunos em Exame: resolver todas as questões da prova.

- Não é permitido o uso de calculadora.
- Durante a prova, deve manter-se o telemóvel desligado.
- Não se esclarecem dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma das folhas que compõem a prova (incluindo a de rascunho).
- Apresente todas as justificações necessárias.
- Escreva apenas a tinta permanente ou com esferográfica.

PUN = UN - PUN

1. Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) [1,0 val.] $f(x) = x \cdot e^{3x}$ $\Rightarrow P\, x\, e^{3x} = x \cdot \frac{e^{3x}}{3} - \frac{1}{3} P\, 3 e^{3x} =$

$= \frac{1}{3}\left(x e^{3x} - e^{3x}\right) + C = \frac{e^{3x}}{3}(x-1) + C$

$C = 0$

$P f(x) = \frac{e^{3x}}{3}(x-1)$

b) [1,0 val.] $g(x) = \frac{4x^2}{tg(1+x^3)}$

$$\int \frac{4x^2}{tg(1+x^3)} = \int \frac{4x^2}{\frac{\text{Sen}(1+x^3)}{\text{Cos}(1+x^3)}} = \int \frac{4x^2 \cdot \text{Cos}(1+x^3)}{\text{Sen}(1+x^3)} =$$

$$= \frac{4}{3} \int \frac{3x^2 \, \text{Cos}(1+x^3)}{\text{Sen}(1+x^3)} = \frac{4}{3} \ln|\text{Sen}(1+x^3)| + C$$

$C=0$

$\Downarrow$

$\frac{4}{3} \ln|\text{Sen}(1+x^3)|$

2. [1,5 val.] Calcule o valor do integral $\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx$.

$$\int_2^5 \frac{\sqrt{x-1}}{x}\, dx = \int_1^2 \frac{t \cdot 2t}{t^2+1}\, dt$$

$$= 2\int_1^2 \frac{t^2}{t^2+1}\, dt = 2\int_1^2 1\, dt - 2\int_1^2 \frac{1}{t^2+1}\, dt$$

$t = \sqrt{x-1}$

$t^2 = x-1$

$x = t^2+1$

$x' = 2t$

$$= 2\left[t\right]_1^2 - 2\left[\operatorname{arctg} t\right]_1^2 = 2 - 2\operatorname{arctg} 2 + 2\operatorname{arctg} 1$$

$$= 2 + \frac{\pi}{2} - 2\operatorname{arctg} 2$$

3. [1,0 val.] Dada a função $\boldsymbol{f(x) = \int_0^x \frac{t^2-t}{e^{5t^4}}\, dt}$, determine $\boldsymbol{f'(x)}$ e os extremos de $\boldsymbol{f}$.

$$f'(x) = \frac{x^2 - x}{e^{5x^4}}$$

$$f'(x) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x = 0$$

$$x(x-1) = 0$$

$$x = 0 \vee x = 1$$

		0		1	
$f'(x)$	+	0	−	0	+
	↗	M	↘	m	↗

$f(0)$ é máximo

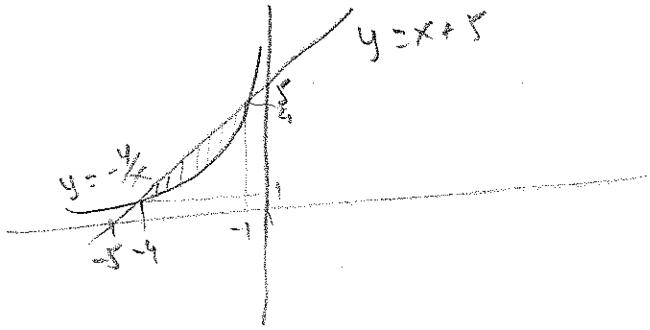
$f(1)$ é mínimo

4. [1,5 val.] Represente a região do plano definida pelas seguintes condições

$$xy \leq -4, \quad x - y \geq -5, \quad x \leq 0, \qquad y \geq 0$$

e determine a sua área.

$xy = -4 \qquad y = x+5$



$$\int_{-4}^{-1} x+5-\left(-\frac{4}{x}\right) dx = \int_{-4}^{-1} x+5+\frac{4}{x}\, dx$$

$$= \left[\frac{x^2}{2}+5x+4\ln|x|\right]_{-4}^{-1} = \frac{1}{2}-5+4\underbrace{\ln|-1|}_{0} -$$

$$-\left(\frac{16}{2}-20+4\ln|-4|\right) = -\frac{9}{2}-\frac{16}{2}+\frac{40}{2}-4\ln 4$$

$$= \frac{15}{2}-4\ln 4$$

5. [1,5 val.] A fábrica SilverGold produz o produto SilverClassic. Sabe-se que a taxa de variação do preço em função do tempo é diretamente proporcional ao excesso de procura do produto segundo a equação diferencial

$$\frac{dp}{dt} = 8(q_d - q_s),$$

em que as quantidades q_d, q_s são positivas dadas por $q_d(p) = 8 - p$ e $q_s(p) = p$.

Calcule a expressão de $p(t)$ sabendo que $p(0) = 3$.

$$\frac{dp}{dt} = 8(q_d - q_s) = 8[(8-p) - (p)] = 8(8-2p)$$

$$\frac{dp}{dt} = 8(8-2p)$$

$$\frac{1}{2} \frac{(-2)1}{8-2p} dp = 8\,dt$$

$$-\frac{1}{2} \ln|8-2p| = 8t + c$$

$$\ln|8-2p| = -16t \underbrace{-2c}_{+k}$$

$$8-2p = e^{-16t+k}$$

$$-2p = e^{-16t+k} - 8$$

$$p = \frac{8 - e^{-16t+k}}{2}$$

$$\frac{e^k}{2} = k'$$

$$p = \frac{8}{2} - \left[\frac{e^{-16t} \cdot e^k}{2}\right]$$

$$p(t) = 4 - k' \cdot e^{-16t}, \quad \forall k' \in \mathbb{R}$$

$$p(0) = 3 = 4 - k' \cdot e^{-16 \times 0}$$

$$4 - k' = 3$$

$$k' = 1$$

Temos então,

$$p(t) = 4 - e^{-16t}$$

6. [1,0 val./1,5 val.] Calcule, se possível, a soma da série $\sum_{n\geq 3}\left(\mathbf{1}+\frac{1}{n}\right)^{4n}$.

$$\lim a_n = \lim\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right]^4 = e^4 \neq 0 \Rightarrow \text{Div}$$

7. [1,0 val./1,5 val.] Determine o intervalo de convergência da série de potências

$$\sum_{n\geq 1}\frac{(x+3)^{n+1}}{2^n}.$$

$$\sum_{n\geq 1}\frac{1}{2^n}(x+3)^{n+1}$$

$$a_n = \frac{1}{2^n} \longrightarrow r = \lim\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|} = \lim\frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2^{n+1}}} = \lim\frac{2^{n+1}}{2^n} = 2$$

$$|x+3| < 2$$

$$-2 < x+3 < 2$$

$$-5 < x < -1$$

Conv. em $x \in \left]-5,-1\right[$

$$x=-5 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{(-5+3)^{n+1}}{2^n} = \sum_{n\geq 1}\frac{(-2)^{n+1}}{2^n} = \sum_{n\geq 1}(-1)^n\cdot(-2)$$

$$a_n = (-1)^n\cdot(-2) \not\to 0 \rightarrow \text{Div.}$$

$$x=-1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1}\frac{2^{n+1}}{2^n} = \sum_{n\geq 1} 2 \rightarrow \text{Div}$$

8. [1,5 val./2,5 val.] Determine, caso existam, os extremos da função real de duas variáveis reais

$$f(x,y) = 5y^2 + xy$$

condicionada pela equação $x = 1 - y$.

$$L = 5y^2 + xy + \lambda(x + y - 1)$$

$$\begin{cases} L'_x = y + \lambda = 0 \\ L'_y = 10y + x + \lambda = 0 \\ L'_\lambda = x + y - 1 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 9y + x = 0 \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -9x \\ -9y + y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} - \\ -8y = 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = 9/8 \\ \lambda = +1/8 \\ y = -1/8 \end{cases}$$

$$(x, y, \lambda) = \left(\frac{9}{8}, -\frac{1}{8}, +\frac{1}{8}\right)$$

$$\overline{H}_{(x,y,\lambda)} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 10 \end{vmatrix} = 1 + 1 - 10 = -8 < 0$$

$f\left(\frac{9}{8}, -\frac{1}{8}\right)$ é Mín.

9. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\textbf{Max} \quad L = 6x - 8y + 2z$$

$$\textbf{s.a.} \quad \begin{array}{l} 2x - 2y + 3z \leq 9 \\ x - y + z \geq 4 \\ x, y, z \geq 0 \end{array}$$

$L = 6x - 8y + 2z - Mu_2$

s.a. $2x - 2y + 3z + s_1 = 9$

$x - y + z - t_2 + u_2 = 4$

$x, y, z, s_1, t_2, u_2 \geq 0$

a) [1,5 val./2,5 val.] Escreva o 1º quadro do problema no método do *Simplex* e melhore a solução (apresentado 2º quadro).

$u_2 = 4 - x + y - z + t_2$

$$\text{Max } L = 6x - 8y + 2z - M(4 - x + y - z + t_2)$$

$$L = 6x + Mx - 8y - My + 2z + Mz - Mt_2 - 4M$$

$$L - (6+M)x + (8+M)y - (2+M)z + Mt_2 = -4M$$

		x	y	z	s_1	t_2	u_2	RHS	
6	L	-6	8	-2	0	0	0	0	
1	L'	-1	1	-1	0	1	0	-4	
-2	s_1	2	-2	3	1	0	0	9	9/2
←	u_2	1	-1	1	0	-1	1	4	4/1
	L	0	2	4	0	-6		24	
	~~L'~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~		~~0~~	
	s_1	0	0	1	1	2		1	
	x	1	-1	1	0	-1	-	4	
	L	0	2	7	3	0		27	
	t_2							1/2	
	x							9/2	

Obtiveram-se os seguintes *outputs* do *Solver* (Relat. Respost. e Relat. Sensibil.) para este problema:

Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas
Folha de cálculo: [12_13_solverEXAME.xlsx]Sheet1
Relatório gerado: 20-05-2013 16:55:01

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
$G$11	f.o.	27	27

Restrições

Célula	Nome	Valor da célula	Fórmula	Estado	Tolerância
$F$16	Restrição R1	9	$F$16<=$G$16	Arquivar	0
$F$15	Restrição R2	4,5	$F$15>=$G$15	Não arquivar	0,5
$A$7	x	4,5	$A$7>=0	Não arquivar	4,5
$B$7	y	0	$B$7>=0	Arquivar	0
$C$7	z	0	$C$7>=0	Arquivar	0

Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade
Folha de cálculo: [12_13_solverEXAME.xlsx]Sheet1
Relatório gerado: 20-05-2013 16:55:01

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objetivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$A$7	x	4,5	0	6	2	4,666666667
$B$7	y	0	-2	-8	2	1E+30
$C$7	z	0	-7	2	7	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
$F$16	Restrição R1	9	3	9	1E+30	1
$F$15	Restrição R2	4,5	0	4	0,5	1E+30

b) [0,5 val./1,0 val.] Indique a solução ótima do problema, incluindo os valores das variáveis de folga e/ou de excesso, e o valor ótimo.

$x = 4{,}5 \rightarrow s_1' = 0$ $\quad z = 27$

$y = 0 \rightarrow s_2' = 2$

$z = 0 \rightarrow s_3' = 7$

$s_1 = 0 \rightarrow w_1 = 3$

$s_2 = 0{,}5 \rightarrow w_2 = 0$

c) [0,5 val./1,0 val.] Indique quais as consequências para a solução ótima e para o valor ótimo do problema caso o coeficiente da variável y na função objetivo passe a ser -7. Se concluir que o valor ótimo se altera, indique o seu valor.

$\Delta c_2 = 1 \; ; \; c_2 \in \left]-\infty, -6\right[\Rightarrow$ Base mantém-se

$L^N = L + \Delta L = 27 + 1 \times 0 = 27$

Mantém

d) [1,5 val./2,0 val.] Formule o dual e apresente os respetivos ponto ótimo e valor ótimo.

$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$

$\text{Min } G = 9w_1 + 4w_2$

$$\text{s.a.} \quad \begin{aligned} 2w_1 + w_2 &\geq 6 \\ -2w_1 - w_2 &\geq -8 \\ 3w_1 + w_2 &\geq 2 \\ w_1 \geq 0, \; w_2 &\leq 0 \end{aligned}$$

ver b)

$G = 27$

$w_1 = 3$

$w_2 = 0$

$t_1 = 0$

$s_2 = 2$

$t_3 = 7$

10. [1,5 val./2,0 val.] Um estaleiro com 5 operários comprou máquinas que pretende afetar aos seus operários, sendo que cada máquina ficará afeta a um e um só dos operários. Por constrangimentos orçamentais, a administração do estaleiro comprou apenas 4 máquinas. Pretende-se minimizar os custos, sabendo que pelas características de cada operário, os seus custos individuais de laboração com cada máquina são (em u.m.):

	Máquinas			
	1	**2**	**3**	**4**
Operário 1	10	18	14	40
Operário 2	12	22	28	44
Operário 3	14	26	14	40
Operário 4	16	18	16	42
Operário 5	8	16	26	48

Obtenha o plano ótimo de afetação das máquinas aos operários, de modo a obter o mínimo custo.

10	18	14	40	0
12	22	28	44	0
14	26	14	40	0
16	18	16	42	0
8	16	26	48	0

~~2~~	~~2~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
4	6	14	4	0
~~6~~	~~8~~	~~0~~	~~0~~	~~0~~
8	2	2	2	0
~~0~~	~~0~~	~~12~~	~~8~~	~~0~~

2	2	0	0*	2
2	4	12	2	0*
6	8	0*	0	2
6	0*	0	0	0
0*	0	12	8	2

$X_{14} = X_{25} = X_{33} = X_{42} = X_{51} = 1$

11. Considere o jogo de dois jogadores e soma nula com a seguinte tabela de *payoff*:

		Jogador B		
		1	**2**	**3**
Jogador A	**I**	8	- 4	8
	II	6	- 4	10
	III	0	4	2

a) [1,0 val./1,5 val.] Averigue a existência de estratégias dominadas e discuta a estabilidade do jogo.

$$\begin{array}{ccc} 8 & -4 & 8 \\ \cancel{6} & \cancel{-4} & \cancel{10} \\ 0 & 4 & 2 \end{array}$$

Est. 3 de B dominada pelo 1

Depois

Est. II de A dominada pelo I

A: Maxmin = Max{-4, 0} = 0

B: Minimax = Min{8, 4} = 4

Não estável

b) [1,0 val./2,0 val.] Resolva o jogo para o Jogador B, incluindo o valor do jogo.

$$\begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 8 & -4 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \\ \begin{array}{cc} y_1 & y_2 \end{array} \end{array}$$

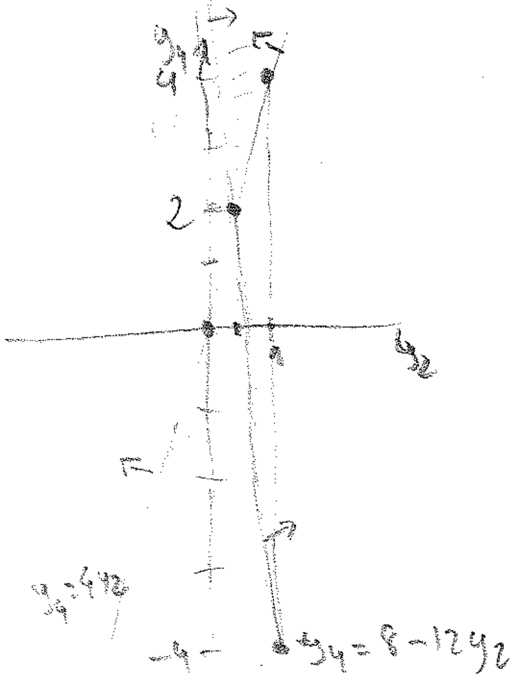
Jog B

$$\min \; y_4$$

$$\text{s.a.} \quad 8y_1 - 4y_2 \le y_4$$
$$4y_2 \le y_4$$
$$y_1 + y_2 = 1$$
$$y_1, y_2 \ge 0, \; y_4 \text{ livre}$$

$$\begin{cases} 8y_1 - 4y_2 \le y_4 \\ 4y_2 \le y_4 \\ y_1 = 1 - y_2 \end{cases} \quad \begin{cases} 8(1-y_2) - 4y_2 \le y_4 \\ 4y_2 \le y_4 \end{cases}$$

$$8 - 8y_2 - 4y_2 \le y_4 \qquad 8 - 12y_2 \le y_4$$
$$4y_2 \le y_4$$



$y_4 = 2$

$y_1 = \frac{1}{2}$

$y_2 = \frac{1}{2}$

$y_3 = 0$

$S_1 = 0$

$S_2 = 0$

12. [1,5 val./2,5 val.] A Iberlima apresentou a uma empresa especializada em recrutamento de pessoal uma proposta para seleção de um jovem qualificado. Foi selecionado um dos candidatos que, tendo aceite as condições impostas pela empresa, deve desempenhar várias tarefas distintas. Quanto a essas tarefas, o candidato selecionado sabe que:

- Vai desempenhar funções de responsável financeiro, recebendo 35 euros por hora. Necessita de cumprir pelo menos 1 hora por dia e a empresa pode remunerar-lhe até 4 horas diárias nessa função.
- Vai desempenhar funções de responsável pela logística do armazém. Necessita de trabalhar pelo menos 2 horas por dia à remuneração de 30 euros por hora.
- Adicionalmente, por cada hora (ou fração de hora) ocupada como responsável da logística do armazém, tem a possibilidade de dar até 1/2 hora de formação nessa área (isto é, até ao equivalente a metade do tempo de trabalho como responsável pela logística do armazém).

É imposto pela Iberlima que o candidato selecionado não exceda um total de 5 horas diárias em todo o trabalho que efetuar relacionado com a logística do armazém, como responsável ou como formador. No tempo de formação recebe um acréscimo de 20 euros por hora. A Iberlima contrata o candidato selecionado em regime part-time e este não pode trabalhar mais do que 8 horas por dia.

É objetivo do candidato selecionado decidir qual o tempo que deverá ocupar em cada uma das suas tarefas de modo a atingir a melhor remuneração possível.
Formule em Programação Linear o problema que permite ao candidato selecionado determinar o plano ótimo que procura, definindo devidamente as variáveis de decisão.

X_i = nº horas trabalhadas em i,

$i = 1$, Resp. Fin.
$i = 2$, Resp. Logíst.
$i = 3$, Formação Logíst.

$$\text{Max } R = 35X_1 + 30X_2 + 50X_3$$

s.a.

$$X_1 \geq 1$$
$$X_1 \leq 4$$
$$X_2 \geq 2$$
$$X_3 \leq \frac{1}{2}X_2$$
$$X_2 + X_3 \leq 5$$
$$X_1 + X_2 + X_3 \leq 8$$
$$X_1, X_2, X_3 \geq 0$$

RASCUNHO: