

Proposta

1 Primitivas

$$1. \text{ (1.0 val.) } \boxed{\mathcal{P} [x \exp (x^2 + 3)]} = \frac{1}{2} \mathcal{P} [2x \exp (x^2 + 3)] \\ = \frac{1}{2} \exp (x^2 + 3) + C, \quad C \in \mathbb{R}$$

$$2. \text{ (1.5 val.) } \boxed{\mathcal{P} [x \arcsin (x^2)]}$$

$$\begin{aligned} & \begin{array}{c} u'=x, \quad v=\arcsin x^2 \\ \text{por partes} \end{array} \quad \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) - \mathcal{P} \left[\frac{x^2}{2} \frac{2x}{\sqrt{1-(x^2)^2}} \right] \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) - \boxed{\mathcal{P} \frac{x^3}{\sqrt{1-x^4}}} = \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) - \mathcal{P} [x^3 (1-x^4)^{-1/2}] \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) + \frac{1}{4} \mathcal{P} [-4x^3 (1-x^4)^{-1/2}] \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) + \frac{1}{4} \frac{(1-x^4)^{1/2}}{1/2} + C \\ &= \frac{x^2}{2} \arcsin (x^2) + \frac{1}{2} \sqrt{1-x^4} + C, \quad C \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

2 Integrais (um que engloba subst. e racionais)

$$1. \text{ (1.0 val.) } \boxed{\int_0^2 \frac{x-2}{(x+1)^2} dx} = \int_0^2 \frac{A}{x+1} + \frac{B}{(x+1)^2} dx = \int_0^2 \frac{1}{x+1} + \frac{-3}{(x+1)^2} dx \\ = \left[\ln |x+1| - 3 \frac{(x+1)^{-1}}{-1} \right]_0^2 = \left[\ln |x+1| + \frac{3}{x+1} \right]_0^2 = \ln(3) + 1 - \ln 1 - 3 \\ = -2 + \ln 3$$

$$2. \text{ (1.5 val.) } \boxed{\int_1^9 \frac{1}{x(1+\sqrt{x})} dx}$$

$$\begin{array}{c} \sqrt{x}=t \\ \text{por substit.} \end{array} \quad \int_1^3 \frac{1}{t^2(1+t)} \cdot 2t \, dt = 2 \int_1^3 \frac{1}{t(1+t)} dt = 2 \int_1^3 \frac{A}{t} + \frac{B}{t+1} dt$$

$$\begin{aligned} \text{cálculo.}_{\text{auxil.}} \quad & 2 \int_1^3 \frac{1}{t} + \frac{-1}{t+1} dt = 2 [\ln |t| - \ln |t+1|]_1^3 \\ & = 2 [\ln(3) - \ln(4) - \ln(1) + \ln(2)] = 2 [\ln(6) - \ln(4)] = 2 \ln \frac{6}{4} = 2 \ln \frac{3}{2} \end{aligned}$$

3 Área

1. **(1.5 val.)** Determine a área do domínio plano

$$D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y \leq 2 \wedge y \geq |x| + 1\}$$

Resolução: Pela representação gráfica verificamos que a área pedida é dada pela soma de integrais

$$\begin{aligned} A &= \int_{-1}^0 2 - (1 - x) dx + \int_0^1 2 - (1 + x) dx \\ &= \int_{-1}^0 1 + x dx + \int_0^1 1 - x dx = \left[x + \frac{x^2}{2} \right]_{-1}^0 + \left[x - \frac{x^2}{2} \right]_0^1 \\ &= 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 1. \end{aligned}$$

4 EDO

1. **(1.0 val.)** Resolva a equação diferencial ordinária de 1ª ordem

$$(y^2 + 1) \frac{dy}{dx} = \cos x$$

sujeita à condição $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

Resolução: É uma EDO de variáveis separáveis pois

$$(y^2 + 1) dy = (\cos x) dx \Leftrightarrow \int (y^2 + 1) dy = \int \cos x dx$$

$$\Leftrightarrow \frac{y^3}{3} + y = \sin(x) + C$$

Dado que $y = 1$ quando $x = \frac{\pi}{2}$, obtemos

$$\frac{1}{3} + 1 = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) + C \Leftrightarrow \frac{1}{3} + 1 - 1 = C \Leftrightarrow C = \frac{1}{3}.$$

Solução particular:

$$\frac{y^3}{3} + y = \sin(x) + \frac{1}{3}.$$

2. **(1.5 val)** Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial de 1ª ordem

$$y' - \sin \frac{1}{x} = \frac{2y}{x}$$

Resolução: É uma EDO linear com $A(x) = -\frac{2}{x}$ e $B(x) = \sin \frac{1}{x}$. Logo

$$\begin{aligned} \exp[-\mathcal{P} A(x)] &= \exp\left[-\mathcal{P}\left(-\frac{2}{x}\right)\right] = \exp(2 \ln |x|) = \exp(\ln |x|^2) \\ &= |x|^2 = x^2. \end{aligned}$$

A solução geral é dada por

$$\begin{aligned} y(x) &= \exp[-\mathcal{P} A(x)] \cdot \mathcal{P}\left[\frac{B(x)}{\exp[-\mathcal{P} A(x)]}\right] + C \cdot \exp[-\mathcal{P} A(x)] \\ &= x^2 \mathcal{P}\left[\frac{\sin \frac{1}{x}}{x^2}\right] + Cx^2 = -x^2 \mathcal{P}\left[-\frac{1}{x^2} \sin \frac{1}{x}\right] + Cx^2 \\ &= -x^2 \left(-\cos \frac{1}{x}\right) + Cx^2 = x^2 \cos \frac{1}{x} + Cx^2 = x^2 \left(C + \cos \frac{1}{x}\right), \end{aligned}$$

com $C \in \mathbb{R}$.

5 Série

1. Considere a série de potências

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (x-3)^n \right].$$

- (a) **(0.5 val./1.0 val.)** Determine, caso exista, a soma da série numérica obtida com $x = 4$.

Resolução: Obtemos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (4-3)^n \right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (1)^n \right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} \right] = \sum_{n \geq 1} \left[3 \left(\frac{1}{2} \right)^n \right].$$

É uma série geométrica de razão $r = 1/2$,

$$r = \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\frac{3}{2^{n+1}}}{\frac{3}{2^n}} = \frac{3 \cdot 2^n}{3 \cdot 2^{n+1}} = \frac{2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2}.$$

Como $\left|\frac{1}{2}\right| < 1$ então a série é convergente. A sua soma é dada por

$$S = \frac{u_1}{1-r} = \frac{3 \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{\frac{3}{2}}{\frac{1}{2}} = 3.$$

(b) **(1.0 val./2.0 val.)** Determine o domínio de convergência da série de potências.

Resolução 1: Temos

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (x-3)^n \right] = 3 \sum_{n \geq 1} \left[\frac{1}{2^n} (x-3)^n \right] = 3 \sum_{n \geq 1} \left(\frac{x-3}{2} \right)^n.$$

Para cada valor de $x \in \mathbb{R}$ obtemos uma série (numérica) geométrica de razão $r = \frac{x-3}{2}$. Como tal é absolutamente convergente se e só se $\left| \frac{x-3}{2} \right| < 1$, ou seja, para

$$-1 < \frac{x-3}{2} < 1 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5.$$

Para $\mathbb{R} \setminus]1, 5[$ obtemos uma série divergente. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D_{conv} =]1, 5[$ e, para todos os valores de x em D_{conv} a convergência é absoluta.

Resolução 2: Consideremos $v_n = \frac{3}{2^n}$. O raio de convergência é dado pelo limite

$$R = \lim_n \left| \frac{v_n}{v_{n+1}} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{3}{2^n}}{\frac{3}{2^{n+1}}} \right| = \lim_n \frac{3 \cdot 2^{n+1}}{3 \cdot 2^n} = \lim_n \frac{2^{n+1}}{2^n} = \lim_n 2 = 2.$$

A condição de convergência absoluta $|x-3| < 2$ é então

$$|x-3| < 2 \Leftrightarrow -2 < x-3 < 2 \Leftrightarrow 1 < x < 5 \Leftrightarrow x \in]1, 5[.$$

Para $x \in]-\infty, 1[\cup]5, +\infty[$ a série de potências é divergente.

Para $x = 1$ temos a série numérica (alternada)

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (1-3)^n \right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (-2)^n \right] = \sum_{n \geq 1} \left[3 \cdot \frac{(-2)^n}{2^n} \right] = \sum_{n \geq 1} [3 \cdot (-1)^n]$$

que é divergente pois o seu termo geral não tende para 0 (tem a subsequência dos termos de ordem ímpar a tender para -3 e a subsequência

dos termos de ordem par a tender para 3, logo não tem limite) (também é série geométrica de razão $-1 \notin]-1, 1[$).

Para $x = 5$ temos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} (5 - 3)^n \right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{3}{2^n} 2^n \right] = \sum_{n \geq 1} 3$$

que é divergente pois o seu termo geral não tende para 0 (tende para 3) (é série geométrica de razão $1 \notin]-1, 1[$).

Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D_{conv} =]1, 5[$ e, para todos os valores de x em D_{conv} a convergência é absoluta.

6 Extremos

1. Considere a função

$$f(x, y) = x^3 + xy + ay^2.$$

- (a) **(1.0 val./2.0 val.)** Sabendo que, para todo o valor real de a , $(x, y) = (0, 0)$ é um ponto crítico (ou de estacionaridade) da função f sujeita à restrição $y = x$, determine para que valores do parâmetro a este ponto crítico é um máximo condicionado.

Resolução: Consideremos a função Lagrangeana

$$L(x, y, \lambda) = x^3 + xy + ay^2 - \lambda \varphi(x, y) = x^3 + xy + ay^2 - \lambda(y - x).$$

A matriz hessiana orlada, onde $\varphi(x, y) = y - x$, é

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{H}}(x, y) &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x^2}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial x \partial y}(x, y) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y \partial x}(x, y) & \frac{\partial^2 L}{\partial y^2}(x, y) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 6x & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

atendendo a que

$$\frac{\partial L}{\partial x} = 3x^2 + y + \lambda \quad \text{e} \quad \frac{\partial L}{\partial y} = x + 2ay - \lambda = 0.$$

Temos $n = 2$ variáveis na função f e $m = 1$ restrições. Há que considerar um só determinante principal (pois $n - m = 2 - 1 = 1$), o

de maior ordem, e multiplicado por $(-1)^m = (-1)^1 = -1$. No ponto crítico $(0, 0)$ temos então

$$\begin{aligned} (-1)^1 \cdot \Delta_3 &= (-1) \cdot |\bar{\mathbf{H}}(0, 0)| = - \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2a \end{vmatrix} \\ &= -(-1 - 1 - 2a) = 2 + 2a. \end{aligned}$$

Existe um máximo (local) condicionado no ponto crítico $(0, 0)$ se e só se

$$2 + 2a < 0 \Leftrightarrow 2a < -2 \Leftrightarrow a < -1.$$