ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa

Licenciaturas: Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Marketing e Economia

Frequência / Exame de 1.ª Época

OPTIMIZAÇÃO / MATEMÁTICA II

4 de Junho de 2010 — Ano lectivo 2009/2010

Nome:.. Número:............
Curso:.. Turma:............
Nome do docente:..

Seleccione a opção (caso contrário, assume-se que realiza exame):
Frequência ☐ **Resolver as questões 6 a 10 — 1h + 30m**
Exame ☐ **Resolver as questões 1 a 10 — 2h + 30m**

- As cotações apresentadas referem-se ao Exame e as da Frequência são o dobro destas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Formulário disponível no final do enunciado.
- Não são esclarecidas dúvidas durante a prova
- Não são permitidos telemóveis ligados.
- Não destacar nenhuma folha do caderno de provas
- Apresente todas as justificações necessárias.

1. Determine:

a) [0 5 val] $P\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$ $= P\left(3x^2\,(x^3+1)^{-1/3}\right)$

$$= \frac{(x^3+1)^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + C$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x^3+1)^2}$$

b) [1.5 val] $P\left(\frac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

$\sqrt{x} = t$

$x = t^2$

$\varphi'(t) = 2t$

$$\begin{array}{r|l} t^2 & t^2+1 \\ \cancel{-t^2}-1 & 1 \\ \hline -1 & \end{array}$$

$$\frac{t^2}{t^2+1} = 1 - \frac{1}{t^2+1}$$

$$= P\left(\frac{t}{t^2+1} \times 2t\right)$$

$$= 2\,P\left(\frac{t^2}{t^2+1}\right)$$

$$= 2\,P(1) - 2\,P\left(\frac{1}{t^2+1}\right)$$

$$= 2\,t - 2\,\text{arctg}(t) + C$$

$$= 2\sqrt{x} - 2\,\text{arctg}(\sqrt{x}) + C$$

$\boxed{2.}$ [2.0 val] Calcule o valor do integral $\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}dx$.

$$P\left(\frac{x}{\cos^2 x}\right) = P\big(\underbrace{x}_{v} \cdot \underbrace{\sec^2 x}_{u}\big)$$

$$= P(\sec^2 x) \cdot x - P\big(P(\sec^2 x) \cdot x'\big)$$

$$= \text{tg}\,x \cdot x - P(\text{tg}\,x \cdot 1)$$

$$= x \cdot \text{tg}\,x - P\left(\frac{\text{sen}\,x}{\cos x}\right)$$

$$= x \cdot \text{tg}\,x + \text{Ln}\,|\cos x| + C$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{x}{\cos^2 x}\,dx = \Big[x \cdot \text{tg}\,x + \text{Ln}\,|\cos x|\Big]_0^{\pi/4}$$

$$= \pi/4 \times \text{tg}\,\frac{\pi}{4} + \text{Ln}\left|\cos\frac{\pi}{4}\right| - 0 - \text{Ln}\,|\cos(0)|$$

$$= \frac{\pi}{4} \times 1 + \text{Ln}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right) - 0$$

$y=2x$

x	y
0	0
$\frac{1}{2}$	1

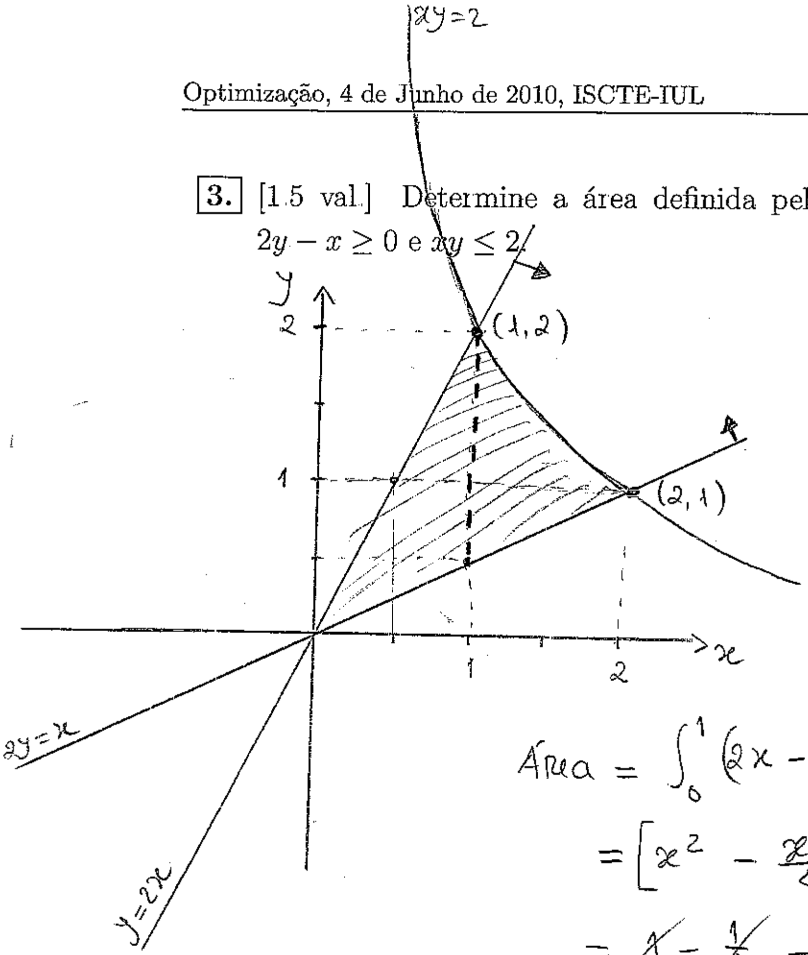
$2y=x$

x	y
0	0
1	$\frac{1}{2}$

$xy=2$

x	y
1	2
2	1

3. [1.5 val.] Determine a área definida pelas inequações $y - 2x \leq 0$, $2y - x \geq 0$ e $xy \leq 2$.



Pontos de intersecção

$\begin{cases} xy=2 \\ y=2x \end{cases}$ $\begin{cases} x\,2x=2 \\ — \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 1 \\ y = \pm 2 \end{cases}$

$\begin{cases} xy=2 \\ 2y=x \end{cases}$ $\begin{cases} y = \pm 1 \\ x = \pm 2 \end{cases}$

$$\text{Área} = \int_0^1 \left(2x - \frac{x}{2}\right)dx + \int_1^2 \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)dx$$

$$= \left[x^2 - \frac{x^2}{4}\right]_0^1 + \left[2\ln|x| - \frac{x^2}{4}\right]_1^2$$

$$= \cancel{1} - \cancel{\frac{1}{4}} - 0 + 2\ln(2) - \cancel{1} - \left(2\ln(1) - \cancel{\frac{1}{4}}\right)$$

$$= 2\ln(2)$$

4. [2.0 val.] Determine o integral particular da equação diferencial ordinária $\boxed{x^2dy + ydx = 2x^2e^{1/x}dx}$, sujeita à condição inicial $y(1) = 0$

$$\Leftrightarrow x^2 \frac{dy}{dx} + y = 2x^2 e^{1/x}$$

$$\Leftrightarrow y' + \underbrace{x^{-2}}_{A(x)} y = \underbrace{2e^{1/x}}_{B(x)}$$

EDO Linear de 1ª ordem

$$\int A(x)\,dx = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{1}{x}$$

Sol. geral

$$y = e^{\frac{1}{x}} \cdot \int \frac{2\cancel{e^{1/x}}}{\cancel{e^{1/x}}}\,dx + C\,e^{1/x} \quad , C \in \mathbb{R}$$

$$= e^{1/x} \cdot \int 2\,dx + C\,e^{1/x}$$

$$= 2e^{1/x}\,x + C\,e^{1/x}$$

$$= e^{1/x}(2x + C)$$

Sol. particular

$$y(1) = 0 \Leftrightarrow e^1(2 + C) = 0 \Leftrightarrow C = -2$$

$$\boxed{y = e^{1/x}(2x - 2)}$$

$\boxed{5.}$ a) [1.5 val.] Dada a série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n+1)^2-4}$, estude-a quanto à convergência e, se possível, determine a sua soma.

$$\sum \frac{1}{(n+1)^2-4} = \sum \frac{1}{n^2+2n-3} = \sum \frac{1}{(n-1)(n+3)}$$

$n^2+2n-3=0$

$n=-3 \vee n=1$

Série de Mengoli

$$\frac{1}{(n-1)(n+3)} = \frac{A}{n-1} + \frac{B}{n+3} \Leftrightarrow 1 = An+3A+Bn-B \Leftrightarrow \begin{cases} A+B=0 \\ 3A-B=1 \end{cases} \begin{cases} A=\frac{1}{4} \\ B=-\frac{1}{4} \end{cases}$$

$$\sum_{n\geq 2} \Big(\underbrace{\frac{-1/4}{n-1}}_{u_n} + \underbrace{\frac{1/4}{n+3}}_{u_{n+4}} \Big)$$

k $\quad p$

Como $\lim u_n = 0 \Rightarrow$ A série é convergente

$$S = u_2 + \dots + u_{\underbrace{2+4-1}_{5}} - 4 \lim u_n$$

$$= u_2 + u_3 + u_4 + u_5$$

$$= -\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right) = -\frac{25}{48}$$

b) [1.0 val.] Estude a série $\sum_{n\geq 1}(-1)^n \frac{3^n}{2^{2n+1}}$ quanto à convergência simples e absoluta.

Série alternada com $a_n = \frac{3^n}{2^{2n+1}}$

Série dos módulos

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{4}\right)^n \quad \text{série geométrica}$$

$$|r| = \frac{3}{4} < 1 \Rightarrow \sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{2^{2n+1}} \text{ é convergente}$$

$$\Downarrow$$

$$\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n+1}} \text{ é absolutamente convergente}$$

$\boxed{\textbf{6.}}$ [1.0 val.] Determine os extremos de $f(x, y) = x + 2e^y - e^x - 2y$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - e^x = 0 \\ 2e^y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$H(x,y) = \begin{bmatrix} -e^x & 0 \\ 0 & 2e^y \end{bmatrix}$$

$$H(0,0) = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$$

$D_1 = -1 < 0$

$D_2 = -2 < 0$

$f(0,0)$ não é máximo nem mínimo de f

7. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 2x_1 + 4x_2 \\ s.a: & 3x_1 + x_2 \leq 60 \\ & 1/3\ x_1 + 1/3\ x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) [1.0 val.] Escreva o primeiro quadro do método do Simplex, apresentando todos os cálculos necessários.

forma normal:

$\max\ z = \cdots$

$sa: \cdots + S_1 = 60$

$\cdots - t_2 = 15$

$\cdots\ S_1, t_2 \geq 0$

problema auxiliar: método do Big M

$\max\ z = 2x_1 + 4x_2 - M\mu_2$

$sa: 3x_1 + x_2 + S_1 = 60$

$1/3 x_1 + 1/3 x_2 - t_2 + \mu_2 = 15$

$x_1, x_2, S_1, t_2, \mu_2 \geq 0$

$z = 2x_1 + 4x_2 - M\mu_2 = 2x_1 + 4x_2 - M(15 - 1/3 x_1 - 1/3 x_2 + t_2)$

$= -15M + (2 + 1/3M)x_1 + (4 + 1/3M)x_2 - Mt_2$

1º quadro do método do simplex

	x_1	x_2	S_1	t_2	μ_2	
S_1	3	1	1	0	0	60
t_2	1/3	1/3	0	-1	1	15
z	-2-1/3M	-4-1/3M	0	M	0	-15M

b) [1.25 val.] Após a execução de algumas iterações, obteve-se o quadro do Simplex apresentado abaixo, onde s_1 e t_2 são as variáveis de desvio associadas, respectivamente, à 1.ª e 2.ª restrições e u_2 é a variável artificial relativa à 2.ª restrição.

		x_1	x_2	s_1	t_2	u_2	
	s_1	2	0	1	3	-3	15
(1)	x_2	1	1	0	-3	3	45
(4)	z	2	0	0	-12	$12+M$	180

Verifique se a solução é óptima e, caso não seja, determine-a.

CR de $t_2 = -12 < 0 \Rightarrow$ SBA não é óptima.

$\Rightarrow t_2$ candidata a entrar na base.

$\min\left\{\frac{15}{3}\right\} = 5 \Rightarrow s_1$ sai da base

Novo quadro

	x_1	x_2	s_1	t_2	u_2	
t_2		0		1		5
x_2		1		0	0	60
	10	0	4	0	M	240

$\underbrace{\qquad\qquad}_{CR \geq 0}$

$\Downarrow$

SBA óptima

Solução óptima: $x_1 = 0$ $x_2 = 60$
$s_1 = 0$ $t_2 = 5$

Valor óptimo: $z = 240$

8. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s\ a: & 2x_2 + x_3 \leq 10 \quad (y_1) \quad \text{---} \ +S_1 = 10 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 50 \quad (y_2) \quad \text{---} \ -t_2 = 50 \\ & x_1 + x_2 = 10 \quad (y_3) \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Usando o Solver do Excel obtiveram-se os seguintes resultados:

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
\$F\$8	F.O.	0	70

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coêficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$C\$7	Var. x1	10	0	2	1E+30	9
\$D\$7	Var. x2	0	-9	3	9	1E+30
\$E\$7	Var. x3	10	0	5	1E+30	4,5

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$F\$11	R1	10	5	10	1E+30	0
\$F\$12	R2	50	0	50	0	1E+30
\$F\$13	R3	10	2	10	1E+30	0

a) [0.5 val.] Indique a solução óptima (incluindo o valor das variáveis de folga e de excesso) e o valor óptimo.

solução óptima: $x_1 = 10 \quad x_2 = 0 \quad x_3 = 10$
$S_1 = 10 - 10 = 0$
$t_2 = 10 - 10 = 0$

valor óptimo: $Z = 70$

b) [0.5 val.] Indique, justificando, quais as variáveis básicas e as não básicas

3 rest. ⟹ 3 var. básicas
$x_1 = 10 \neq 0$ e $x_3 = 10 \neq 0 \Rightarrow x_1$ e x_3 são var. básicas
Falta uma var. básica, que será nula (SBA degenerada):
se uma var. é básica ⟹ o seu custo reduzido é zero
Como existem apenas 3 CR nulos, então sabemos que as var. que lhes correspondem são básicas.
Sendo assim, $t_2 = 0$ é a 3ª var. básica.
Conclusão: as V.B. são x_1, x_3 e t_2.

c) [0 75 val] Suponha que o coeficiente da variável x_1 na função objectivo passou a ser 10. Refira quais as consequências desta modificação No caso do valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

$c_1^N = 10 \in IS_{c_1} = [-7, +\infty[\Rightarrow$ a solução óptima mantém-se

no entanto, o valor óptimo pode alterar-se.

Neste caso, teremos:

$z^N = z + (c_1^N - c_1) \cdot x_1^* = 70 + (10-2) \cdot 10 = 150$

d) [1 0 val.] Formule o problema dual e indique a sua solução óptima, bem como o valor óptimo

Dual: $\min G = 10y_1 + 50y_2 + 10y_3$

sa: $4y_2 + y_3 \geq 2$

$2y_1 + 2y_2 + y_3 \geq 3$

$y_1 + y_3 \geq 5$

$y_1 \geq 0,\ y_2 \leq 0,\ y_3$ livre

forma normal:

$\min G = \ldots$

sa: $\ldots - t_1^D = 2$

$\ldots - t_2^D = 3$

$\ldots - t_3^D = 5$

$\ldots\ t_1^D, t_2^D, t_3^D \geq 0$

Através do resultado do Solver fornecido:

$y_1 = 5 \quad y_2 = 0 \quad y_3 = 2$ (preços sombra)

$t_1^D = 0 \quad t_2^D = 9 \quad t_3^D = 0$ (custos reduzidos)

9. Uma empresa dispõe de 2 armazéns, A1 e A2, e abastece 3 clientes, C1, C2 e C3. Cada um desses armazéns dispõe de 200 toneladas e as encomendas são de 150, 100 e 150 toneladas, respectivamente para os clientes C1, C2 e C3. Os custos de abastecimento (u.m./tonelada) de cada um dos clientes a partir de cada um dos armazéns são os seguintes:

		Clientes		
		C1	C2	C3
Armazéns	A1	5	3	5
	A2	4	5	8

A empresa pretende abastecer os clientes ao menor custo total possível.

a) [0.5 val.] Identifique o problema, determine uma solução admissível e refira o seu custo.

$\sum_{i=1}^{2} a_i = 200+200=400 = \sum_{j=1}^{3} b_j = 150+100+150$ ∴ está em equilíbrio.

Trata-se de um problema de transportes

SBA:

	C1	C2	C3	
A1	150	50	—	$\cancel{200}$ $\cancel{50}$ 0
A2	—	50	150	$\cancel{200}$ $\cancel{150}$ 0
	$\cancel{150}$ 0	$\cancel{100}$ $\cancel{50}$ 0	$\cancel{150}$ 0	

$m+n-1=2+3-1=4$ var. básicas ✓

$x_{11}=150 \quad x_{12}=50 \quad x_{22}=50 \quad x_{23}=150$

custo: $z = 5\times150+3\times50+5\times50+8\times150 = 750+150+250+1200$
$= 2350$

b) [1.25 val] Investigue se a solução obtida em a) é óptima. Caso não seja, melhore-a

$\boxed{c_{ij} \quad \delta_{ij} \\ x_{ij}}$

	C1	C2	C3	μ_i
A1	5 | 0 150	3 | 0 50	5 | −1	0
A2	4 | −3	5 | 0 50	8 | 0 150	2
v_j	5	3	6	

VB: $\mu_i + v_j = c_{ij}$

VNB: $\delta_{ij} = c_{ij} - \mu_i - v_j$

$$\left.\begin{array}{l} \delta_{13} = -1 < 0 \\ \delta_{21} = -3 < 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \text{SBA não é óptima}$$

$\max\{|-1|, |-3|\} = 3 \Rightarrow x_{21}$ entra na base c/ valor θ

	C1	C2	C3	
A1	$150-\theta$	$50+\theta$		200
A2	θ	$50-\theta$	150	200
	150	100	150	

$\min\{150, 50\} = 50 \Rightarrow x_{22}$ sai da base

Nova SBA:

	C1	C2	C3
A1	100	100	
A2	50		150

$x_{11} = 100 \quad x_{12} = 100$

$x_{21} = 50 \quad x_{23} = 150$

Custo: $z = 2350 + \delta_{21} \times x_{21}$

$= 2350 + (-3)\,50$

$= 2350 - 150$

$= 2200$

c) [1.0 val.] Suponha que a empresa dispõe de um armazém adicional A3, com uma oferta de 50 toneladas. A partir do novo armazém A3, os custos de abastecimento (u.m./tonelada) dos clientes C1 e C2 são de, respectivamente, 3 e 4 u.m., sendo que o cliente C3 não pode ser abastecido por este armazém. Os armazéns A1, A2 e A3 encontram-se cheios e a quantidade que não foi entregue aos clientes terá de ser armazenada. Os custos de armazenamento de cada tonelada são de 2, 1 e 2, respectivamente para os armazéns A1, A2 e A3. Considerando que se trata de um problema de transportes, identifique as origens e as suas disponibilidades, os destinos e as suas procuras, assim como a matriz de custos (sem resolver o problema).

Armazém adicional: A_3 c/ $a_3 = 50$

$\sum_{i=1}^{3} a_i = 450 > \sum_{j=1}^{3} b_j = 400 \Rightarrow$ criar um destino (cliente) fictício C_4 c/ $b_4 = 450 - 400 = 50$

Temos então um problema de transportes:

— 3 origens (armazéns), com ofertas $a_1 = 200$, $a_2 = 200$ e $a_3 = 50$.

— 4 destinos (clientes), com procuras $b_1 = 150$, $b_2 = 100$, $b_3 = 150$ e $b_4 = 50$ (fictício)

— custos unitários de transporte (matriz de custos):

c_{ij}	C1	C2	C3	C4
A1	5	3	5	2
A2	4	5	8	1
A3	3	4	M	2

10. Considere a seguinte matriz de pagamentos de um jogo de soma nula com dois jogadores:

		Jogador B		
		1	2	3
Jogador A	I	−3	2	−1
	II	3	−1	6

a) [0.25 val.] Verifique se existem estratégias dominadas.

Jog. A: não tem estrat. dominadas
Jog. B: a estrat. 3 é dominada pela 1, pois a estrat. 1 nunca é pior q a 3.
Jog. A: não tem estrat. dominadas.

b) [0.5 val.] Averigúe se o jogo é estável.

Jog A: $MaxMin = Max(-3,-1) = -1 = g_{II2}$
Jog B: $MinMax = Min(3,2) = 2 = g_{I2}$
$g_{II2} = -1 \neq 2 = g_{I2}$, logo, o jogo não é estável.

c) [0.5 val.] Formule o problema do Jogador A em Programação Linear (**não esqueça** de indicar o significado de todas as variáveis usadas na formulação)

Sejam,
x_i - probabilidade do jog. A escolher a estrat. i, $i = I, II$
x_3 - ganho mínimo esperado do jogador A.
Formulação do problema do jog. A em P.L.

$$\max\ x_3$$
$$\text{s.a: } -3x_I + 3x_{II} \geq x_3$$
$$2x_I - x_{II} \geq x_3$$
$$x_I + x_{II} = 1$$
$$x_I, x_{II} \geq 0$$
$$x_3 \text{ livre}$$

FOLHA DE RASCUNHO (*mantenha esta folha agrafada às restantes*)

FORMULÁRIO

Algumas Fórmulas Trigonométricas

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x = 1 - 2\sin^2 x = 2\cos^2 x - 1$$

$$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$$

$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2}$

$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ $\qquad$ $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $\qquad$ $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Equações diferenciais ordinárias

Equação linear de 1^a ordem: $y' + A(x)y = B(x)$

Solução geral:

$$y = e^{-\int A(x)dx} \int \frac{B(x)}{e^{-\int A(x)dx}} dx + Ce^{-\int A(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y = \frac{\int B(x).\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int A(x)dx}$$

Equação de Bernoulli: $y' + A(x)y = B(x)y^n$

Solução geral:

$$y = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\int A(x)dx}(1-n) \int \frac{B(x)}{e^{(n-1)\int A(x)dx}} dx + Ce^{(n-1)\int A(x)dx}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y^{1-n} = \frac{\int (1-n)B(x)\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int (1-n)A(x)dx}$$