

Optimização/Matemática II (Eco)

Exame: 2ª Época

1º Ano

2013 / 2014

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing e Economia

16-06-2013

Duração: 2h 30 m

Nome: Número:

Curso: Turma:

Nome do docente:

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadoras
 - Durante a prova, devem manter-se desligados os telemóveis
 - Não se esclarecem dúvidas durante a prova
 - Não destaque nenhuma folha do caderno de provas
 - Apresente todas as justificações necessárias
 - Escreva a tinta permanente ou a esferográfica.
-
-

1. Determine a primitiva de:

a) [1,0 v] $\sin^3(2x)$

b) [1,0 v] $x^2 e^{-\frac{1}{2}x}$

2. Considere a região do plano limitada pelas seguintes condições:

$$xy \leq 2, \quad y \geq |x| \quad \text{e ainda,} \quad y \leq 2 \text{ e } x \geq 0$$

- a) [1 v] Represente-a graficamente.
- b) [2 v] Calcule a sua área.

3. [1,5 v] Mostre que

$$\int_0^1 \frac{\text{sen } \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \approx 0$$

Sugestão: Efetue a seguinte substituição: $u = \sqrt{x}$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{dy}{dx} = -y + \frac{\text{sen } x}{y^2}$$

- a) [1,5 v] Determine o integral geral.
- b) [0,5 v] Determine a solução particular para $y(0) = 1$.

5. [1,0 v] Estude a natureza da seguinte série numérica e calcule, se possível, a sua soma.

$$\sum_{n \geq 1} \left(\frac{15}{4^n} - \frac{3^{n+1}}{4^n} \right)$$

6. [1,5 v] Considere a função $f(x, y) = xy - x^2 + x$ condicionada pela equação $y = -x + 1$.

Determine, caso existam, os extremos da função real de duas variáveis reais (sujeita à mencionada equação).

7. Um agrupamento de escolas está a pensar organizar três eventos, um evento literário, um evento desportivo e um evento musical, com um preço de entrada de 0,5, 1,0 e 0,7 unidades monetárias por pessoa, respetivamente.

Qualquer um destes eventos pode ser realizado nos dois pavilhões existentes, P1 e P2. O custo de arrendamento destes pavilhões é variável, não podendo nunca exceder, respetivamente, de 10 e 5 unidades monetárias. Os valores de arrendamento, em unidades monetárias, por cada 1000 pessoas e para cada um dos eventos são conforme descritos no quadro seguinte:

	P ₁	P ₂
Evento literário	2	1
Evento desportivo	10	8
Evento musical	4	3

O objetivo do agrupamento é otimizar a receita, ou seja, o montante proveniente da venda dos bilhetes.

- a) [1 v] Complete a formulação, em programação linear, do problema. Não se esqueça de definir as variáveis utilizadas na formulação,

$$\begin{aligned} \text{..... } Z = & \text{ } X_1 + \text{ } X_2 + \text{ } X_3 \\ \text{s. a} & \\ & \text{ } X_1 + \text{ } X_2 + \text{ } X_3 \leq \text{} \\ & \text{ } X_1 + \text{ } X_2 + \text{ } X_3 \leq \text{} \\ & X_1, X_2, X_3 \geq 0 \end{aligned}$$

- b) [2 v] Tendo por base o primeiro quadro do Simplex,

	X ₁	X ₂	X ₃	S ₁	S ₂	
S ₁	2	10	4	1	0	10
S ₂	1	8	3	0	1	5
	-500	-1000	-700	0	0	0

Verifique se a solução é ótima e, se não o for, determine o próximo quadro. Identifique todos os cálculos efetuados.

c) Utilizando o Solver, obtiveram-se os seguintes *outputs*:

Célula de Objectivo (Máximo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
\$H\$8	Valor da f.o.	0	2500

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$C\$7	Var. x1	5	0	500	1E+30	150
\$D\$7	Var. x2	0	-1500	1000	1500	1E+30
\$E\$7	Var. x3	0	-300	700	300	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
\$F\$11	R1	10	250	10	0	10
\$F\$12	R2	5	0	5	1E+30	0

c1) [1 v] Indique a solução ótima do problema (incluindo os valores das variáveis de folga e/ ou de excesso), bem como, o valor ótimo do problema. Interprete os resultados à luz do enunciado.

c2) [1 v] Suponha que o coeficiente na função objetivo associado a X_1 se altera para 400. Indique quais as consequências para a solução ótima e para o valor ótimo. Justifique a sua resposta.

c3) [1 v] Formule o problema Dual e indique a sua solução ótima, bem como, o valor ótimo.

8. [2 v] Para preparar o evento literário são necessárias realizar cinco atividades (A_1 , A_2 , A_3 , A_4 e A_5), cada uma a cargo de uma das cinco escolas pertencentes ao agrupamento. Com vista a maximizar o envolvimento de cada escola, pretende-se envolver o maior número de alunos por escola. O quadro seguinte mostra o número de alunos afetos a cada atividade, por escola.

	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Escola A	40	30	45	25	30
Escola B	50	45	42	29	40
Escola C	30	15	47	39	22
Escola D	60	20	53	43	27
Escola E	40	35	47	30	53

Obtenha o plano ótimo de afetação dos alunos a cada atividade, por escola.

9. [1 v] Calcule o valor médio da função $f(x) = x^2 + x^3$, para $0 \leq x \leq 1$

Rascunho