

Optimização/Matemática II (Eco)

Exame: 2ª Época

1º Ano

2012 / 2013

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing, Gestão e Engenharia Industrial e Economia

12-06-2013

Duração: 2h 30 m

Nome: Número:
Curso: Turma:
Nome do docente:

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadoras
 - Durante a prova, devem manter-se desligados os telemóveis
 - Não se esclarecem dúvidas durante a prova
 - Não destaque nenhuma folha do caderno de provas
 - Apresente todas as justificações necessárias
 - Escreva a tinta permanente ou a esferográfica.
-
-

1. Determine a primitiva de:

a) $[1,0 \text{ v}] \frac{\log(x)}{\sqrt{x}}$

$$\text{b) } [1,0 \text{ v}] \quad \frac{4x-2}{(x-1)(x^2+1)}$$

2. [1,0 v] Calcule a área limitada pelas funções $f(x) = x^2$ e $g(x) = -x + 6$.

3. Para calcular $\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{x}} \, dx$ siga os seguintes passos:

a) [1,0 v] Faça a substituição $x = \sin^4 y$ e verifique que

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{x}} \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3(y) \cos^2(y) \, dy$$

b) [0,5 v] Usando a identidade fundamental da trigonometria $\sin(y)^2 + \cos(y)^2 = 1$ verifique que

$$\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{x}} \, dx = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin(y) \cos^2(y) - \sin(y) \cos^4(y) \, dy$$

c) [1,0 v] Usando a igualdade da alínea anterior calcule $\int_0^1 \sqrt{1 - \sqrt{x}} \, dx$

4. Considere a equação diferencial

$$\frac{\partial y}{\partial x} + y = xy^3$$

- a) [1,5 v] Determine o integral geral.
- b) [0,5 v] Determine a solução particular para $y(0) = 1$.

5. [1,0 v] Estude a natureza da seguinte série numérica e calcule, se possível, a sua soma.

$$\sum_{n \geq 1} \frac{2^2}{n(n+2)}$$

6. [1,5 v] Determine, caso existam, os extremos livres da função real de duas variáveis reais:

$$f(x, y) = \frac{y^3}{3} + e^x - x - y$$

7. Na tabela seguinte encontra-se parcialmente representado um quadro do simplex dum problema linear.

a) [1,5 v] Justificando, preencha as células em falta e elabore uma iteração.

	x_1	x_2	x_3	s_1	t_2	Z
x_1	1	-2	4			4
	0	1	2	1		2
	0	3	6			8
Z	0	-4	-2			20

b) [0,5 v] A solução que obteve é ótima? Justifique.

8. Para a resolução do seguinte problema foi utilizado o *solver*, cujo o output se apresenta de seguida.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\
 x_1 + x_2 + x_3 &\leq 8 \\
 x_2 + x_3 &\geq 4 \\
 -\frac{x_2}{2} + x_3 &\leq 0 \\
 x_1, x_2, x_3 &\geq 0
 \end{aligned}$$

Microsoft Excel 14.0 Answer Report

Worksheet: [exame_cálculos.xlsx]Sheet1

Report Created: 04-06-2013 14:19:56

Result: Solver found a solution. All Constraints and optimality conditions are satisfied.

Solver Engine

Objective Cell (Max)

Cell	Name	Original Value	Final Value
\$K\$6	fo	0	30,66666667

Variable Cells

Cell	Name	Original Value	Final Value	Integer
\$H\$4	x	0	4	Contin
\$I\$4	y	0	2,666666667	Contin
\$J\$4	z	0	1,333333333	Contin

Constraints

Cell	Name	Cell Value	Formula	Status	Slack
\$K\$10	Restrição 1	8	\$K\$10<=\$L\$10	Binding	0
\$K\$11	Restrição 2	4	\$K\$11>=\$L\$11	Binding	0
\$K\$12	Restrição 3	-2,22045E-16	\$K\$12<=\$L\$12	Binding	0

Microsoft Excel 14.0 Sensitivity Report
Worksheet: [exame_cálculos.xlsx]Sheet1
Report Created: 04-06-2013 14:19:56

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$H\$4	x	4	0	4	1E+30	0,333333333
\$I\$4	y	2,666666667	0	3	0,5	1E+30
\$J\$4	z	1,333333333	0	5	1	2

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
\$K\$10	Restrição 1	8	4	8	1E+30	4
\$K\$11	Restrição 2	4	-0,333333333	4	4	4
\$K\$12	Restrição 3	-2,22045E-16	1,333333333	0	4	2

a) [0,5 v] Indique a solução ótima, incluindo os valores das variáveis de folga e/ou de excesso, e o valor ótimo do problema.

b) [0,5 v] Se o termo independente da segunda restrição passasse de 4 para 5, qual o efeito no valor ótimo do problema? E se o da primeira se alterasse para 3?

c) [1,5 v] Formule o dual e encontre a sua solução óptima.

9. Uma empresa comercializa três tipos de gelados, G1, G2 e G3 em quatro regiões distintas, R1, R2, R3 e R4. O stock para cada tipo de gelado é de 200 caixas e a procura estimado é de 100, 200, 140 e 160, respectivamente para as regiões R1, R2, R3 e R4. Os custos de distribuição (u.m./caixa) são os seguintes:

	R1	R2	R3	R4
G1	3	4	7	5
G2	7	4	3	2
G3	9	6	5	10

Pretende-se um programa optimizado de fornecimento dos referidos produtos.

- a) [1,0 v] Formule este problema como um Problema de Transportes.

- b) [0,5 v] Encontre uma solução inicial para o problema.

- c) [1,0 v] Avalie se a solução inicial é ótima. Caso não seja, proceda a uma iteração de optimização indicando qual a variável a entrar e a variável a sair.

- 10.** Considere o seguinte problema linear resultado da formalização dum jogo de soma nula

$$\begin{aligned} \text{Min } Z &= y \\ 4p_1 + 3p_2 &\leq y \\ 2p_1 + 3p_2 &\leq y \\ p_1 + p_2 &= 1 \\ p_1, p_2 &\geq 0, y \text{ livre} \end{aligned}$$

- a) [1,5 v] Defina a tabela de pagamentos e identifique para que jogador foi elaborada a formalização.

- b) [1,5 v] Escreva o problema na forma normal e a primeira tabela do simplex (não efectue nenhuma iteração).

FORMULÁRIO

- Solução geral da EDO linear

$$y' + A(x) \cdot y = B(x)$$

$$y(x) = e^{-P[A(x)]} \cdot P \left[\frac{B(x)}{e^{-P[A(x)]}} \right] + C \cdot e^{-P[A(x)]}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

- Solução geral da EDO de Bernoulli

$$y' + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$$

$$y(x) = \sqrt[n-1]{e^{(n-1)P[A(x)]} \cdot (1-n)P \left[\frac{B(x)}{e^{(n-1)P[A(x)]}} \right] + C \cdot e^{(n-1)P[A(x)]}}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

--- *** ---

RASCUNHO: