ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

OPTIMIZAÇÃO/MATEMÁTICA II

Licenciaturas de Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Gestão de Marketing e Economia

Exame da 2.ª fase

19 de Junho de 2010 Ano Lectivo 2009/2010

Nome .... Número ....

Curso .... Turma ....

Nome do docente ....

Aviso:

- Não é permitido o uso de calculadoras.
- Formulário disponível no final do enunciado.
- Não são esclarecidas dúvidas durante a prova
- Não são permitidos telemóveis ligados.
- Não destacar nenhuma folha do caderno de prova.
- Apresente sempre todas as justificações necessárias.

1. Calcule uma primitiva para a seguinte função *f(x)*:

$$f(x) = \arcsin(x)$$

2. Calcule o seguinte integral definido:

$$\int_1^2 \frac{x^2+1}{x^3+2x^2+x}\,dx$$

3. Calcule a área definida por $y^2 \leq x \leq 9$.

4. Estude a natureza das seguintes séries e calcule a soma sempre que possível:

a) $\sum_{n\geq 2} \frac{2}{2^{n+2}}$

b) $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{n^3 + n^2 + 5}{5n^2 - 1} \right)$

5. Considere a equação diferencial $x^3 yy' = (2 - x^2) + (2 - x^2)y^2$

a) Determine o integral geral.

b) Determine a solução particular para $y(1) = 1$

6. Um consumidor tem a seguinte função de utilidade:

$$U(x, y) = \frac{x^2}{2} + \ln y$$

Sabendo que o preço do bem x é 4 euros e o do bem y é 2 euros, calcule o óptimo do consumidor tendo em conta que o seu orçamento exacto para os bens x e y é de 10 euros. Justifique a sua resposta.

7. Considere o seguinte problema de programação linear:

Min. $8x_1 + 6x_2 + 10x_3$

$$\text{s.a.} \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 \geq 2 \\ 4x_1 + 3x_2 + 5x_3 \geq 1 \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}$$

a) Formule o problema dual.

b) Apresente a solução óptima do primal e do dual.

8. Considere o seguinte problema de PL:

Min. $Z = 0{,}4x_1 + 0{,}5x_2$

Suj. a $0{,}3x_1 + 0{,}1x_2 \leq 2{,}7$

$$0{,}5x_1 + 0{,}5x_2 = 6$$
$$0{,}6x_1 + 0{,}4x_2 \geq 6$$
$$x_1, x_2 \geq 0$$

E, os *outputs* do Solver do Excel são os seguintes:

Microsoft Excel 12.0 Relatório de respostas

Célula de destino (Mín)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
F3	Z	0	5,25

Microsoft Excel 12.0 Relatório de sensibilidade

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
B3	x1	7,5	0	0,4	0,1	1E+30
C3	x2	4,5	0	0,5	1E+30	0,1

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
D5		2,7	-0,5	2,7	0,9	0,3
D6		6	1,1	6	7,5	0,5
D7		6,3	0	6	0,3	1E+30

a) Explicite a solução óptima do problema, indicando quais as variáveis básicas e as não básicas, bem como os valores das variáveis de excesso e de folga e o valor óptimo.

b) Indique quais as consequências para a solução do problema caso o termo independente da primeira restrição passe a ser 3. Se o valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

9. Considere o seguinte problema:

Min. $9x_{11}+8x_{12}+10x_{13}+2x_{21}+4x_{22}+5x_{23}+4x_{31}+9x_{32}+6x_{33}$

s.a. $x_{11}+x_{12}+x_{13}=10$

$$x_{21}+x_{22}+x_{23}=20$$
$$x_{31}+x_{32}+x_{33}=15$$

$$x_{11}+x_{21}+x_{31}=5$$
$$x_{12}+x_{22}+x_{32}=20$$
$$x_{13}+x_{23}+x_{33}=20$$

$$x_{11},x_{12},x_{13},x_{21},x_{22},x_{23},x_{31},x_{32},x_{33}\geq 0$$

a) Determine uma solução inicial.

b) Investigue se a solução obtida em a) é óptima. Caso não seja, melhore-a.

10. Considere o seguinte jogo de 2 jogadores de soma nula:

		Jogador B		
		I	II	III
	1	-3	-2	7
Jogador A	2	1	0	2
	3	5	-3	-4

a) Verifique se o jogo é estável. Se sim, qual o valor do jogo?

b) Formule-o em Programação Linear para o jogador A.

FORMULÁRIO

Algumas Fórmulas Trigonométricas

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2}$

$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ $\qquad$ $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $\qquad$ $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Equações diferenciais ordinárias

Equação linear de 1^a ordem: $y' + A(x)y = B(x)$

Solução geral:

$$y = e^{-\int A(x)dx} \int \frac{B(x)}{e^{-\int A(x)dx}} dx + Ce^{-\int A(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y = \frac{\int B(x)\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int A(x)dx}$$

Equação de Bernoulli: $y' + A(x)y = B(x)y^n$

Solução geral:

$$y = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\int A(x)dx}(1-n) \int \frac{B(x)}{e^{(n-1)\int A(x)dx}} dx + Ce^{(n-1)\int A(x)dx}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y^{1-n} = \frac{\int (1-n)B(x)\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int (1-n)A(x)dx}$$

ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

OPTIMIZAÇÃO/MATEMÁTICA II

Licenciaturas de Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Gestão de Marketing e Economia

Exame de 2.ª fase

19 de Junho de 2010	Ano Lectivo 2009/2010

Cotação da prova

1. 1 v.
2. 1 v.
3. 1.5 v.
4. a) 1 v.
   b) 1 v.
5. a) 1,5 v.
   b) 0,5 v.
6. 1,5 v.
7. a) 1,5 v.
   b) 1,5 v.
8. a) 1,5 v.
   b) 1,5 v.
9. a)1,5 v.
   b) 1,5 v.
10. a) 1 v.
    b) 1 v.