ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa

Licenciaturas: Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Marketing e Economia

Frequência / Exame de 1.^{a} Época

OPTIMIZAÇÃO / MATEMÁTICA II

4 de Junho de 2010 | Ano lectivo 2009/2010

Nome:.. Número:.................

Curso:.. Turma:..................

Nome do docente:..

Seleccione a opção (caso contrário, assume-se que realiza exame):

Frequência ☐ **Resolver as questões 6 a 10 — 1h + 30m**

Exame ☐ **Resolver as questões 1 a 10 — 2h + 30m**

- As cotações apresentadas referem-se ao Exame e as da Frequência são o dobro destas.
- Não é permitido o uso de calculadora.
- Formulário disponível no final do enunciado.
- Não são esclarecidas dúvidas durante a prova.
- Não são permitidos telemóveis ligados.
- Não destacar nenhuma folha do caderno de provas.
- Apresente todas as justificações necessárias.

---

1. Determine:

a) [0.5 val.] $P\dfrac{3x^2}{\sqrt[3]{x^3+1}}$

b) [1.5 val.] $P\left(\dfrac{\sqrt{x}}{x+1}\right)$

$\boxed{\textbf{2.}}$ [2.0 val.] Calcule o valor do integral $\int_0^{\pi/4} \dfrac{x}{\cos^2 x}dx$.

$\boxed{\textbf{3.}}$ [1.5 val.] Determine a área definida pelas inequações $y - 2x \leq 0$, $2y - x \geq 0$ e $xy \leq 2$.

$\boxed{\textbf{4.}}$ [2.0 val.] Determine o integral particular da equação diferencial ordinária $x^2dy + ydx = 2x^2e^{1/x}dx$, sujeita à condição inicial $y(1) = 0$.

$\boxed{\textbf{5.}}$ **a)** [1.5 val.] Dada a série $\sum_{n\geq 2} \frac{1}{(n+1)^2-4}$, estude-a quanto à convergência e, se possível, determine a sua soma.

b) [1.0 val.] Estude a série $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{3^n}{2^{2n+1}}$ quanto à convergência simples e absoluta.

$\boxed{\textbf{6.}}$ [1.0 val.] Determine os extremos de $f(x, y) = x + 2e^y - e^x - 2y$

$\boxed{\textbf{7.}}$ Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 2x_1 + 4x_2 \\ s.a.: & 3x_1 + x_2 \leq 60 \\ & 1/3\ x_1 + 1/3\ x_2 \geq 15 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) [1.0 val.] Escreva o primeiro quadro do método do Simplex, apresentando todos os cálculos necessários.

b) [1.25 val.] Após a execução de algumas iterações, obteve-se o quadro do Simplex apresentado abaixo, onde s_1 e t_2 são as variáveis de desvio associadas, respectivamente, à 1.ª e 2.ª restrições e u_2 é a variável artificial relativa à 2.ª restrição.

	x_1	x_2	s_1	t_2	u_2	
s_1	2	0	1	3	-3	15
x_2	1	1	0	-3	3	45
z	2	0	0	-12	$12+M$	180

Verifique se a solução é óptima e, caso não seja, determine-a.

8. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 \\ s.a.: & 2x_2 + x_3 \leq 10 \\ & 4x_1 + 2x_2 + x_3 \geq 50 \\ & x_1 + x_2 = 10 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{array}$$

Usando o Solver do Excel obtiveram-se os seguintes resultados:

Célula de destino (Máx)

Célula	Nome	Valor original	Valor final
F8	F.O.	0	70

Células ajustáveis

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coêficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
C7	Var. x1	10	0	2	1E+30	9
D7	Var. x2	0	-9	3	9	1E+30
E7	Var. x3	10	0	5	1E+30	4,5

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
F11	R1	10	5	10	1E+30	0
F12	R2	50	0	50	0	1E+30
F13	R3	10	2	10	1E+30	0

a) [0.5 val.] Indique a solução óptima (incluindo o valor das variáveis de folga e de excesso) e o valor óptimo.

b) [0.5 val.] Indique, justificando, quais as variáveis básicas e as não básicas.

c) [0.75 val.] Suponha que o coeficiente da variável x_1 na função objectivo passou a ser 10. Refira quais as consequências desta modificação. No caso do valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

d) [1.0 val.] Formule o problema dual e indique a sua solução óptima, bem como o valor óptimo.

9. Uma empresa dispõe de 2 armazéns, A1 e A2, e abastece 3 clientes, C1, C2 e C3. Cada um desses armazéns dispõe de 200 toneladas e as encomendas são de 150, 100 e 150 toneladas, respectivamente para os clientes C1, C2 e C3. Os custos de abastecimento (u.m./tonelada) de cada um dos clientes a partir de cada um dos armazéns são os seguintes:

		Clientes		
		C1	C2	C3
Armazéns	A1	5	3	5
	A2	4	5	8

A empresa pretende abastecer os clientes ao menor custo total possível.

a) [0.5 val.] Identifique o problema, determine uma solução admissível e refira o seu custo.

b) [1.25 val.] Investigue se a solução obtida em a) é óptima. Caso não seja, melhore-a.

c) [1.0 val.] Suponha que a empresa dispõe de um armazém adicional A3, com uma oferta de 50 toneladas. A partir do novo armazém A3, os custos de abastecimento (u.m./tonelada) dos clientes C1 e C2 são de, respectivamente, 3 e 4 u.m., sendo que o cliente C3 não pode ser abastecido por este armazém. Os armazéns A1, A2 e A3 encontram-se cheios e a quantidade que não for entregue aos clientes terá de ser armazenada. Os custos de armazenamento de cada tonelada são de 2, 1 e 2, respectivamente para os armazéns A1, A2 e A3. Considerando que se trata de um problema de transportes, identifique as origens e as suas disponibilidades, os destinos e as suas procuras, assim como a matriz de custos (sem resolver o problema).

10. Considere a seguinte matriz de pagamentos de um jogo de soma nula com dois jogadores:

		Jogador B		
		1	2	3
Jogador A	I	-3	2	-1
	II	3	-1	6

a) [0.25 val.] Verifique se existem estratégias dominadas.

b) [0.5 val.] Averigúe se o jogo é estável.

c) [0.5 val.] Formule o problema do Jogador A em Programação Linear **(não esqueça** de indicar o significado de todas as variáveis usadas na formulação).

FOLHA DE RASCUNHO (*mantenha esta folha agrafada às restantes*)

FORMULÁRIO

Algumas Fórmulas Trigonométricas

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ $\qquad$ $\sin(2x) = 2\sin x \cos x$

$$\begin{aligned}\cos(2x) &= \cos^2 x - \sin^2 x\\ &= 1 - 2\sin^2 x\\ &= 2\cos^2 x - 1\end{aligned}$$

$\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}$

$\sin^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{2}$ $\qquad$ $\cos^2(\frac{x}{2}) = \frac{1+\cos x}{2}$

$\tan^2(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{1+\cos x}$ $\qquad$ $\tan(\frac{x}{2}) = \frac{1-\cos x}{\sin x} = \frac{\sin x}{1+\cos x}$

$\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x} - 1$ $\qquad$ $\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x} - 1$

x	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Equações diferenciais ordinárias

Equação linear de 1^a ordem: $y' + A(x)y = B(x)$

Solução geral:

$$y = e^{-\int A(x)dx} \int \frac{B(x)}{e^{-\int A(x)dx}}dx + Ce^{-\int A(x)dx}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y = \frac{\int B(x).\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int A(x)dx}$$

Equação de Bernoulli: $y' + A(x)y = B(x)y^n$

Solução geral:

$$y = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\int A(x)dx}(1-n)\int \frac{B(x)}{e^{(n-1)\int A(x)dx}}dx + Ce^{(n-1)\int A(x)dx}}, \quad C \in \mathbb{R}$$

ou $$y^{1-n} = \frac{\int (1-n)B(x)\lambda(x)dx}{\lambda(x)}, \quad \lambda(x) = e^{\int (1-n)A(x)dx}$$