Optimização/Matemática II (Eco)

Exame: 2ª Época | 1º Ano | 2011 / 2012

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão do Marketing, Gestão e Engenharia Industrial e Economia

12-06-2012

Duração: 2h 30m

Nome:..Número: ....
Curso: ....Turma:..............................
Nome do docente: ....

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadoras
- Durante a prova, devem manter-se desligados os telemóveis
- Não se esclarecem dúvidas durante a prova
- Não destaque nenhuma folha do caderno de provas
- Apresente todas as justificações necessárias
- Escreva a tinta permanente ou a esferográfica.

---

1. Calcule

a) [1,0 v] $P\dfrac{1-\cos(2x)}{2}$

b) [1,0 v] $P\dfrac{e^{2x}}{\sqrt{1-e^{2x}}}$

2. [1,0 v] Calcule o valor do integral $\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{sent}{\cos^2 t} dt$.

3. [1,0] Determine a área delimitada pelas seguintes rectas:

$$y \leq 4 - x \ , y \geq x - 2 \ e, x \geq 2$$

4. Considere a seguinte equação diferencial:

$$y' = \frac{2x}{y} - y$$

a) [1,0 v] Determine o integral geral da equação.

b) [0,5 v] Determine a solução particular sujeita à condição $y(0) = 0$.

5. [2,0 v] Determine, caso existam, os extremos livres da função real de duas variáveis reais

$$f(x, y) = x^2 + y^3 - 3xy\,.$$

6. Considere o seguinte problema de Programação Linear

$$\text{Minimizar } Z = 2x_1 + x_2$$

$$\text{Sujeito a: } \begin{cases} x_1 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 \geq 8 \\ x_1 + x_2 \leq 8 \\ x_2 \leq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) [1,0 v] Escreva o quadro inicial do SIMPLEX.

b) [1,0 v] Diga, justificando, quais as variáveis básicas do quadro inicial bem como os seus valores e quais as variáveis que selecciona tanto para entrar como para sair da base, na primeira operação de condensação?

c) [1,5 v] Considere o seguinte quadro obtido após a realização de algumas iterações sobre o primeiro quadro do SIMPLEX:

	x_1	x_2	t_1	t_2	s_3	s_4	b_i
	1	0	-1	0	0	0	2
	0	1	1	-1/2	0	0	2
	0	0	0	1/2	1	0	4
	0	0	-1	1/2	0	1	0
Z	0	0	1	1/2	0	0	-6

Nota: t_1**,** t_2**,** s_3 **e** s_4 **são as variáveis de excesso e de folga introduzidas nas quatro primeiras restrições**

Indique a solução óptima e o valor óptimo dos problemas primal e dual, incluindo o valor das variáveis de folga e/ou excesso.

d) [0,5 v] Como classifica o tipo de solução encontrada para o primal? Justifique.

7. Considere o seguinte problema linear

Max $\quad Z = 19x_1 + 17x_2 + 11x_3$

s.a. $\quad 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 \leq 75$

$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \leq 60$

$4x_1 + x_2 + x_3 \geq 50$

E, $\quad x_1, x_2, x_3 \geq 0$

Usando o Solver obtiveram-se os seguintes resultados:

Célula de Objectivo (Máximo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
G2		0	482.5

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
B2	x1	7.5	0	19	49	7.666666667
C2	x2	20	0	17	11.5	12.25
D2	x3	0	-5.7	11	5.7	1E+30

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
Recurso 1		75	4.9	75	8.333333333	50
Recurso 2		55	0	60	1E+30	5
Recurso 3		50	2.3	50	25	25

a) [0,5 v] Indique a solução óptima (incluindo o valor das variáveis de folga e de excesso) e o valor óptimo.
b) [0,5 v] Indique, justificando, quais as variáveis básicas e as não-básicas.
c) [1,0 v] O que representa o preço sombra do recurso 1 e cujo valor é 4,9.
d) [1,0 v] Para a variável x3 e de acordo com o output do Solver, o valor do seu coeficiente poderá decrementar indefinidamente. Como interpreta esta informação?

8. Considere um problema particular de transporte com os seguintes custos associados, disponibilidades nas origens e requisitos nos destinos:

Dest.→ / Origens↓	Custos				Disponibilidades na origem
	A	B	C	D	
1	6	4	5	4	60
2	7	6	7	3	30
3	8	7	6	9	100
Procura no destino	30	50	40	70	

a) [1,0 v] Formule-o como um problema de Programação Linear
b) [1,0 v] Encontre uma solução inicial para o problema.
c) [1,0 v] Avalie se a solução inicial é óptima. Caso não seja, proceda a uma iteração de optimização indicando qual a variável a entrar e, a variável a sair.

9. Considere o jogo de soma nula com dois jogadores e a seguinte tabela de *pay-off*:

	B		
A	4	2	5
	1	8	3

a) [0,5 v] Mostre que o jogo não é estável.
b) [0,5 v] Averigúe se existem estratégias dominadas para cada um dos jogadores.
c) [0,5 v] Formalize o jogo como um problema em programação linear para o jogador A e para o jogador B.
d) [1,0 v] Resolva o jogo graficamente para o jogador B, indicando o seu valor e as estratégias mistas óptimas.

Formulário

- Solução geral da EDO linear

$$y' + A(x) \cdot y = B(x)$$

$$\mathrm{y(x)} = \mathrm{e}^{-\mathrm{P}[\mathrm{A(x)}]} \cdot \mathrm{P}\left[\frac{\mathrm{B(x)}}{\mathrm{e}^{-\mathrm{P}[\mathrm{A(x)}]}}\right] + \mathrm{C} \cdot \mathrm{e}^{-\mathrm{P}[\mathrm{A(x)}]}, \text{ com } \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

- Solução geral da EDO de Bernoulli

$$y' + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$$

$$y(x) = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)P[A(x)]} \cdot (1-n)P\left[\frac{B(x)}{e^{(n-1)P[A(x)]}}\right] + C \cdot e^{(n-1)P[A(x)]}}, \text{ com } \mathrm{C} \in \mathbb{R}$$

--- *** ---

Rascunho