ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Optimização/Matemática II (Eco)

Frequência/ Exame 1ª Época | 1º Ano – 2º Semestre | 2013 / 2014

Licenciaturas em Gestão, Finanças e Contabilidade,
Gestão de Marketing e Economia

02-06-2014

Duração da Frequência: 1h 30m (1h 15m + 15 m)
Duração do Exame: 2h 30m (2h + 30 m)

Nome: .... Número: ....
Curso: .... Turma: ....
Nome do docente: ....

Alunos em Frequência: resolver apenas as questões de 5. a 10. da prova.
Alunos em Exame: resolver todas as questões da prova.
Nas questões comuns às duas provas, a primeira cotação diz respeito ao Exame de 1ª época.

Nota:

- Não é permitido o uso de calculadora
- Durante a prova, deve manter o telemóvel desligado
- Não se esclarecem dúvidas durante a prova
- Não destaque nenhuma das folhas que compõem a prova (incluindo a de rascunho)
- Apresente todas as justificações necessárias
- Escreva apenas a tinta permanente ou com esferográfica.

---

1. Calcule uma primitiva das seguintes funções:

a) (***1 pontos***) $f(x,y) = \frac{3\cos(x)}{1+4sen^2(x)}$.

b) (***1.5 pontos***) $g(x,y) = \frac{3x+2}{x\,(x+1)^2}$.

2. (***1.75 pontos***) Calcule o valor do integral $\int_0^1 x^2\ e^{2x}\, dx$.

3. Considere a região do plano, definida pelas seguintes condições:

$$y \leq 3x,\ y \geq x^2 \text{ e } y \leq -x^2 + 4.$$

a) (***0.75 pontos***) Represente-a graficamente.
b) (***1.25 pontos***) Determine a sua área.

4. (***1.5 pontos***) Determine a solução particular da equação diferencial ordinária $\frac{1}{2x}\frac{dy}{dx}+y=3$, sujeita à condição inicial $y(0)=1$.

5. (***1.75/ 2.5 pontos***) Estude a natureza e a soma da série $\sum_{n\geq 1} 7\left(\frac{1}{a}\right)^{2-3n} a^{5-2n}$, em função do parâmetro real $a \neq 0$, com $n \in \mathbb{N}$.

6. (***1.25/1.75 pontos***) Considere a função real de duas variáveis $f(x,y)$ em que $\frac{\partial f}{\partial x} = 4x - 2y$ e $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y - 2x - 6$. Prove que $(x,y) = (3,6)$ é um minimizante da função $f(x,y)$.

7. (***1.25/2 pontos***) Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$
\begin{array}{lllll}
\text{Max } Z = & 3x + & 4y & & \\
\text{s. a} & & & & \\
& x - & y & \geq 4 & \\
& 2x - & y & \leq 10 & \\
& x, y \geq 0 & & &
\end{array}
$$

Apresente <u>**os dois primeiros quadros**</u> do método do Simplex, indicando todos os cálculos intermédios.

8. Considere o seguinte modelo em Programação Linear referente a um problema de planeamento de produção. As variáveis de decisão representam o nível de produção diário de 3 produtos: P1, P2 e P3. A primeira restrição refere-se à produção mínima de P1, enquanto a segunda está relacionada com o número de horas máquinas diariamente disponíveis. O objectivo é maximizar o lucro diário.

$$\begin{aligned} \text{Max } Z = \; & x_1 + 4x_2 + 2x_3 \\ \text{s. a} \; & \\ & x_1 \geq 6 \\ & x_1 + 2x_2 + x_3 \leq 24 \\ & x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{aligned}$$

Utilizando o Solver, obtiveram-se os seguintes *outputs*:

Célula de Objectivo (Máximo)

Célula	Nome	Valor Original	Valor Final
B6	f.o.	0	42

Células de Variável

Célula	Nome	Final Valor	Reduzido Custo	Objectivo Coeficiente	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
B3	x1	6	0	1	1	1E+30
C3	x2	9	0	4	1E+30	0
D3	x3	0	0	2	0	1E+30

Restrições

Célula	Nome	Final Valor	Sombra Preço	Restrição Lado Direito	Permissível Aumentar	Permissível Diminuir
E9	R1	6	-1	6	18	6
E10	R2	24	2	24	1E+30	18

a) (***1.0/1.75 pontos***) Indique a solução óptima do problema (incluindo os valores das variáveis de folga e/ ou de excesso), bem como, o valor óptimo do problema. Não se esqueça de interpretar, no contexto, a solução óptima e o valor óptimo.

b) (***0.5/1.0 pontos***) O problema tem soluções óptimas alternativas? Justifique a sua resposta.

c) (***0.75/1.5 pontos***) Suponha que o lucro unitário associado a P1 se altera para 2. Indique quais as consequências para a solução óptima e para o valor óptimo. Justifique a sua resposta.

d) (***1.0/1.75 pontos***) Formule o problema Dual e indique a sua solução óptima, bem como, o valor óptimo.

9. Uma siderurgia possui duas minas, M1 e M2, e três fábricas transformadoras, F1, F2 e F3. As minas M1 e M2 têm 110 e 220 toneladas de minério, respectivamente, para distribuir pelas fábricas. Os custos, em euros, de transportar uma tonelada de minério entre as minas e as fábricas são apresentados na tabela seguinte:

	F1	F2	F3
M1	10	30	20
M2	15	20	40

Sabendo que as fábricas F1, F2 e F3 necessitam de 80, 150 e 100 toneladas de minério, respectivamente, a siderurgia pretende determinar a forma mais económica de distribuir o minério pelas fábricas.

a) (***1.0/1.75 pontos***) Identifique o problema da siderurgia e determine uma solução admissível.

b) (***1.0/1.75 pontos***) Averigúe se a solução admissível determinada em a) é óptima. Caso não seja, melhore-a.

c) (***1.0/1.5 pontos***) A siderurgia adquiriu uma nova mina, designada por M3. No entanto, a mina M3 só pode abastecer de minério as fábricas F1 e F2, sendo os custos de transporte, por tonelada, de 30€ e 50€, respectivamente. Admitindo que cada uma das minas tem capacidade para abastecer apenas uma das fábricas, a siderurgia pretende determinar a forma mais económica de cada fábrica ser abastecida a partir de uma só mina.
Identifique o novo problema e formule-o em Programação Linear. Não se esqueça de definir as variáveis utilizadas na formulação.

10. Considere a seguinte tabela *payoff* relativa ao jogo de soma nula com dois jogadores:

Jogador A		**Jogador B**		
		1	2	3
	I	1	3	3
	II	4	2	–2

a) (***0.75/1.0 pontos***) Estude a estabilidade do jogo.

b) (***0.25/0.75 pontos***) Averigúe a existência de estratégias dominadas.

c) (***0.75/1.0 pontos***) Formule o problema do **Jogador B** em Programação Linear. Não se esqueça de definir as variáveis utilizadas na formulação.

RASCUNHO: