ISCTE - IUL, Dpto de Métodos Quantitativos

CURSOS 1^o Ciclo: Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Eng. Industrial, Marketing, Economia

Frequência e 1^o Exame de OPTIMIZAÇÃO / MATEMÁTICA II

28 de Maio de 2012 **Ano lectivo 2011/2012**

Nome completo: .... Número: ....
Curso: .... Turma: ....
Nome do docente: ....

Seleccione a sua opção (caso contrário, assume-se que realiza Exame):
Frequência ☐ **Resolva as questões 6 a 10** — Duração: **1h15 + 15m**
Exame ☐ **Resolva todas as questões** — Duração: **2h30 + 30m**

- As **cotações** apresentadas dizem respeito a Exame/Frequência.
- Apresente todas as **justificações** necessárias.
- O **formulário** e a **folha de rascunho** estão disponíveis no final da prova.
- Não é permitido o uso de qualquer **calculadora**.
- Não são esclarecidas **dúvidas** durante a prova.
- Não são permitidos **telemóveis** ligados.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado. Estas devem **permanecer agrafadas** durante todo o tempo da prova (incluindo a de rascunho).
- A **folha de rascunho** que constitui o final da prova pode ser usada excepcionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalada.
- Os alunos em prova de Frequência terão de entregar a prova ao fim de 1h30m; caso contrário serão avaliados como prova de Exame.

1. Determine a expressão geral das seguintes primitivas:

(a) [**1.0 val.**] $\mathcal{P}\left(xe^{x^2+3}\right)$

(b) [**2.0 val.**] $\mathcal{P}\left(x \arcsin x^2\right)$

$\boxed{2.}$ **[2.0 val.]** Calcule o valor do seguinte integral

$$\int_1^9 \frac{1}{x\left(1+\sqrt{x}\right)}dx.$$

$\boxed{3.}$ **[1.5 val.]** Determine a área do domínio plano

$$D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \quad y \leq 2 \quad \wedge \quad y \geq |x|+1\right\}.$$

$\boxed{4.}$ **[1.0 val.]** Resolva a equação diferencial ordinária de 1^a ordem

$$\left(y^2+1\right)\frac{dy}{dx} = \cos x$$

sujeita à condição $y(\frac{\pi}{2}) = 1$.

$\boxed{5.}$ **[1.5 val.]** Determine a solução geral $y(x)$ da equação diferencial de 1^a ordem

$$y' - \sin\frac{1}{x} = \frac{2y}{x}$$

$\boxed{6.}$ Considere a série de potências

$$\sum_{n\geq 1}\left[\frac{3}{2^n}(x-3)^n\right].$$

(a) **[0.5 val./1.0 val.]** Calcule, caso exista, a soma da série numérica obtida com $x=4$.

(b) **[1.0 val./1.5 val.]** Determine o domínio de convergência desta série de potências.

$\boxed{7.}$ Considere a função

$$f\left(x,y\right) = x^3 + xy + ay^2.$$

(a) **[1.0 val./1.5 val.]** Faça $a=1$. Mostre que $(x,y) = (0,0)$ e $(x,y) = \left(\frac{1}{6}, -\frac{1}{12}\right)$ são pontos críticos (ou pontos de estacionaridade) da função f. Verifique ainda se cada um destes pontos é um extremo local da função.

(b) **[0.5 val./1.0 val.]** Sabendo que, para todo o valor de $a \in \mathbb{R}$, $(0,0)$ é um ponto crítico da função

$$f\left(x,y\right) = x^3 + xy + ay^2$$

sobre a recta $y=x$, determine para que valores do parâmetro a este ponto crítico é um máximo condicionado.

8. Uma empresa de produção automóvel produz, numa determinada linha de produção, dois modelos da sua marca. Esta linha de produção é composta por 3 actividades, Contrução, Montagem e Pintura. Tem diariamente disponíveis 100 horas de Construção, 120 horas de Montagem e 75 horas de Pintura. Por cada unidade produzida o modelo de tipo 1 necessita de 0,5 horas de Construção; 0,6 horas de Montagem e 0,3 horas de Pintura. O modelo de tipo 2 precisa de 0,6 horas de Construção, 0,7 horas de Montagem e 0,25 horas de Pintura. Segundo o departamento de Marketing será necessário produzir no mínimo 60 unidades do tipo 1, que serão vendidas por 20 mil euros cada, e 50 unidades do tipo 2, a serem vendidas por 25 mil euros cada. É objectivo da empresa optimizar o lucro.

(a) [**0.5 val./1.5 val.**] Formule o Problema de Programação Linear.

(b) [**1.0 val./1.5 val.**] Após algumas iterações obteve-se o seguinte quadro do Simplex.

s1	0	1	0	0	0	0	1	50
s2	0	0	1	0	0	0,5	0,6	40
s3	0	0	0	1	0	0,6	0,7	49
x1	0	0	0	0	1	0,3	0,25	44,5
x2	1	0	0	0	0	1	0	60
z	0	0	0	0	0	-20	-25	2450

Verifique se a solução é óptima e, se não o for, determine o próximo quadro.

<u>Nota:</u> caso lhe seja necessário, considere válidas as seguintes divisões:

$$\frac{40}{0,5} = 80; \quad \frac{40}{0,6} = 66,(6); \quad \frac{49}{0,6} = 81,(6); \quad \frac{49}{0,7} = 70; \quad \frac{44,5}{0,3} = 148,(3) \quad \text{e} \quad \frac{44,5}{0,25} = 178.$$

(c) [**1.0 val./1.5 val.**] A solução óptima é apresentada seguidamente como *output* do

Solver.

Variable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
C3	x1	60	0	20	0,833333333	1E+30
D3	x2	116,6666667	0	25	1E+30	1

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
F10	lesq	47,16666667	0	75	1E+30	27,83333333
F11	lesq	60	-0,833333333	60	80	60
F12	lesq	116,6666667	0	50	66,66666667	1E+30
F8	lesq	100	41,66666667	100	2	40
F9	lesq	117,6666667	0	120	1E+30	2,333333333

Indique o valor das variáveis, inclusivé das variáveis de folga e/ou excesso.

(d) [**0.5 val./1.0 val.**] Suponha que o preço do modelo de tipo 2 aumentou para 27 mil euros. Quais as consequências deste aumento nas quantidades produzidas e no lucro?

(e) [**0.5 val./1.0 val.**] Tendo como objectivo aumentar o lucro, indique em que actividade deverá a empresa aumentar o número de horas disponíveis, qual esse aumento de horas e qual o seu impacto no lucro.

(f) [**0.5 val./1.0 val.**] Se pudesse influenciar alguma das decisões tomadas pelo departamento de Marketing, no que às quantidades mínimas diz respeito, o que faria?

$\boxed{\textbf{9.}}$ Uma corrida de natação por equipas de 400 metros estilos precisa de 4 nadadores diferentes, com cada um a nadar 100 metros de cada estilo (costas, bruços, mariposa e livre). O treinador tem disponíveis 5 nadadores cujos tempos (em segundos) estão dados na tabela seguinte

	Costas	Bruços	Mariposa	Livre
Álvaro	65	73	63	57
Bruno	67	70	65	58
Carlos	68	72	69	55
Duarte	67	75	70	59
Eliseu	71	69	75	57

(a) **[0.5 val./1.0 val.]** Identifique o tipo de problema de Programação Linear em questão. Formule-o.

(b) **[1.0 val./2.0 val.]** De que modo deve o treinador afectar os nadadores a cada estilo?

(c) **[0.5 val./1.0 val.]** Sem resolver o algoritmo, diga se o aparecimento de um novo nadador com os tempos

	Costas	Bruços	Mariposa	Livre
Fernando	69	72	68	57

iria melhorar a prestação da equipa.

10. Considere o jogo de duas pessoas e de soma nula definido pela seguinte matriz de pagamentos

		Jogador 2		
		1	**2**	**3**
Jogador 1	**I**	2	4	-1
	II	8	-3	2
	III	1	4	0

(a) **[0.5 val./0.5 val.]** Analise a existência de estratégias dominadas.

(b) [**0.5 val./0.5 val.**] Mostre que este jogo não é estável.

(c) [**0.5 val./1.0 val.**] Formule o problema do Jogador 1 em Programação Linear.

(d) [**0.5 val./1.5 val.**] Sabendo que o valor do jogo é $\dfrac{8}{9}$ e que as estratégias mistas óptimas do Jogador 1 são

$$x_{\mathrm{I}} = 0, \quad x_{\mathrm{II}} = \frac{4}{9} \quad \text{e} \quad x_{\mathrm{III}} = \frac{5}{9},$$

determine as estratégias mistas óptimas do Jogador 2.

FORMULÁRIO

■ **Solução geral da EDO linear** $y' + A(x) \cdot y = B(x)$:

$$y(x) = e^{-\mathcal{P}\ [A(x)]} \cdot \mathcal{P}\left[\frac{B(x)}{e^{-\mathcal{P}\ [A(x)]}}\right] + C \cdot e^{-\mathcal{P}\ [A(x)]}, \text{ com } C \in \mathbb{R}$$

■ **Solução geral da EDO de Bernoulli** $y' + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$:

$$y(x) = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\cdot\mathcal{P}\ [A(x)]} \cdot (1-n) \cdot \mathcal{P}\left[\frac{B(x)}{e^{(n-1)\mathcal{P}\ [A(x)]}}\right] + C \cdot e^{(n-1)\cdot\mathcal{P}\ [A(x)]}},$$

com $C \in \mathbb{R}$