ISCTE - Instituto Universitário de Lisboa

Licenciaturas: Gestão, Finanças e Contabilidade, Gestão e Engenharia Industrial, Marketing e Economia

Frequência / Exame de 1.^{a} Época

OPTIMIZAÇÃO / MATEMÁTICA II

30 de Maio de 2011 Ano lectivo 2010/2011

Nome:.. Número:.................
Curso:.. Turma:..................
Nome do docente:..

Seleccione a opção (caso contrário, assume-se que realiza exame):
Frequência ☐ **Resolver as questões 5 a 10 — 1h15 + 15m**
Exame ☐ **Resolver as questões 1 a 10 — 2h30 + 30m**

- As **cotações** apresentadas dizem respeito ao Exame/Frequência.
- Não é permitido o uso de **calculadora**.
- O **formulário** está disponível na penúltima folha.
- A **folha de rascunho** está disponível no final da prova.
- **Assinale devidamente** sempre que responda a uma questão fora do espaço destinado. Pode usar o rascunho ou outros espaços livres.
- Não são esclarecidas **dúvidas** durante a prova.
- Não são permitidos **telemóveis** ligados.
- Não destacar nenhuma folha do **caderno de provas**.
- Apresente todas as **justificações** necessárias.

$\boxed{\textbf{1.}}$ [2.0 val.] Determine: $P\dfrac{x-4}{(x-3)^2}$

$\boxed{\mathbf{2.}}$ [2.5 val.] Calcule o valor do integral $\int_0^{1/2} \frac{1}{(1-x^2)\sqrt{1-x^2}} dx$

$\boxed{\textbf{3.}}$ [2.0 val.] Determine a área da região do plano definida por

$$(x-1)^2 \leq y \leq e^x \quad \wedge \quad x \leq 1.$$

$\boxed{\textbf{4.}}$ [2.5 val.] Resolva a seguinte equação diferencial:

$$dy = 2x(y^2+9)dx.$$

$\boxed{\textbf{5.}}$

a) [0.5/1.0 val.] Estude a natureza da série numérica seguinte:

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3^n}{5}.$$

b) [0.75/1.5 val.] Considere a seguinte série de potências de x:

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n+1}}{n+1}.$$

Estude a sua natureza em função do valor de x.

$\boxed{\textbf{6.}}$ Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - 2x + 4y - 10.$$

a) [0.75/1.5 val.] Determine os extremos de $f(x, y)$.

b) [0.75/1.5 val.] Considere a função $f(x, y)$ apresentada, com a seguinte condição:

$$-x + y = -1.$$

Determine os extremos de $f(x, y)$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Considere o seguinte problema de programação linear:

$$\begin{array}{ll} \max & Z = 2x_1 + x_2 \\ \text{s.a.:} & 4x_1 - 2x_2 \leq 10 \\ & x_1 - x_2 \leq 2 \\ & x_1 + x_2 \leq 3 \\ & x_1, x_2 \geq 0 \end{array}$$

a) [0.75/1.5 val.] Escreva o primeiro quadro do método do Simplex.

b) [1.0/1.5 val.] Após a execução de algumas iterações, obteve-se o seguinte quadro do Simplex:

	x_1	x_2	s_1	s_2	s_3	
s_1	0	2	1	-4	0	2
x_1	1	-1	0	1	0	2
s_3	0	2	0	-1	1	1
z	0	-1	0	2	0	4

Verifique se a solução é óptima. Caso não seja, determine-a.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$
\begin{array}{ll}
\min & Z = x_1 + -2x_2 + 3x_3 \\
s.a.: & 2x_1 - 2x_2 + 4x_3 = 20 \\
& x_1 + x_2 - x_3 \leq 4 \\
& 2x_2 + x_3 \geq 50 \\
& x_1, x_2, x_3 \geq 0
\end{array}
$$

Usando o Solver do Excel obtiveram-se os seguintes resultados:

Target Cell (Min)

Cell	Name	Original Value	Final Value
F8	F.O.	0	6

Adjustable Cells

Cell	Name	Final Value	Reduced Cost	Objective Coefficient	Allowable Increase	Allowable Decrease
C7	Var. x1	0	1	1	1E+30	1
D7	Var. x2	18	0	-2	0,333333333	1E+30
E7	Var. x3	14	0	3	0,5	1E+30

Constraints

Cell	Name	Final Value	Shadow Price	Constraint R.H. Side	Allowable Increase	Allowable Decrease
F11	R1	20	0,5	20	1E+30	0
F12	R2	4	-1	4	1E+30	0
F13	R3	50	0	50	0	1E+30

a) [0.5/1.0 val.] Indique a solução óptima (incluindo o valor das variáveis de folga e de excesso) e o valor óptimo.

b) [0.5/1.0 val.] Indique, justificando, quais as variáveis básicas e as não básicas.

c) [0.75/1.0 val.] Suponha que o coeficiente da variável x_3 na função objectivo passou a ser 1. Refira quais as consequências desta modificação. No caso do valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

d) [0.75/1.0 val.] Suponha que o termo independente da segunda restrição passou a ser 10. Refira quais as consequências desta modificação. No caso do valor óptimo se alterar, indique o seu novo valor.

e) [0.5/1.0 val.] Diga qual o significado do preço sombra associado à primeira restrição.

9. Considere o problema de afectação dos trabalhos T1, T2, T3 e T4 às máquinas A, B, C e D, para o qual se pretende obter o menor tempo total de execução. Os tempos de execução de cada trabalho em cada máquina são os seguinte:

		Máquinas			
		A	B	C	D
Trabalhos	T1	3	5	2	4
	T2	4	6	2	4
	T3	2	3	3	2
	T4	5	1	4	1

a) [1.25/2.0 val.] Resolva o problema.

b) [0.5/1.0 val.] Escreva a formulação deste problema de afectação em programação linear.

10. Considere o jogo de dois jogadores A e B e soma nula com a seguinte tabela de *payoffs*:

		Jogador B			
		1	2	3	4
Jogador A	I	2	-3	-4	3
	II	-6	-1	1	8

a) [0.5/1.0 val.] Mostre que o jogo não se resolve por estratégias puras.

b) [0.25/0.5 val.] Averigúe a existência de estratégias dominadas para cada um dos jogadores.

c) [0.5/1.0 val.] Escreva o problema de programação linear que determina as estratégias mistas óptimas do Jogador A.

d) [0.5/1.0 val.] Sabendo que o valor do jogo é -2 e que o Jogador A deve apostar na estratégia I com probabilidade $\frac{1}{2}$, determine as estratégias mistas óptimas para o Jogador B.

FORMULÁRIO

Regras de primitivação: Dada $u = u(x)$ são válidas:

- $P\dfrac{u'}{u} = \ln|u| + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$ (ln indica o logarítmo de Neper)
- $P\left(u^p \cdot u'\right) = \dfrac{u^{p+1}}{p+1} + C$ com $p \in \mathbb{Q} \setminus \{-1\}$ e $\forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(a^u \cdot u'\right) = \dfrac{a^u}{\ln a} + C,$ com $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$
  Em particular, $P\left(e^u \cdot u'\right) = e^u + C$
- $P\dfrac{u'}{1+u^2} = \arctan(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\dfrac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \sin u\right) = -\cos(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \cos u\right) = \sin(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \sec^2 u\right) = \tan(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \csc^2 u\right) = -\cot(u) + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \sec u\right) = \ln|\sec(u) + \tan(u)| + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$
- $P\left(u' \cdot \csc u\right) = \ln|\csc(u) - \cot(u)| + C, \ \forall C \in \mathbb{R}$

Substituições trigonométricas:

$f(x)$ com	$x = g(t)$	$g'(t)$	$t = g^{-1}(x)$
$\boxed{\sqrt{a^2-u^2}}$	$u = a \cdot \sin t$	$u' = a \cdot \cos t$	$t = \arcsin\left(\dfrac{u}{a}\right)$
$\boxed{\sqrt{a^2+u^2}}$	$u = a \cdot \tan t$	$u' = a \cdot \sec^2 t$	$t = \arctan\left(\dfrac{u}{a}\right)$
$\boxed{\sqrt{u^2-a^2}}$	$u = a \cdot \sec t$	$u' = a \cdot \sec(t) \cdot \tan(t)$	$t = \operatorname{arcsec}\left(\dfrac{u}{a}\right)$

Fórmulas trigonométricas:

$$\boxed{\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)} \quad \text{e} \quad \boxed{\cos(2x) = \cos^2(x) - \sin^2(x)}$$

$$\boxed{\tan(2x) = \frac{2\tan x}{1-\tan^2 x}}$$

$$\boxed{1+\tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}} \quad \text{e} \quad \boxed{1+\cot^2 x = \frac{1}{\sin^2 x}}$$

$$\boxed{\cos^2 x = \frac{1+\cos(2x)}{2}} \quad \text{e} \quad \boxed{\sin^2 x = \frac{1-\cos(2x)}{2}}$$

Tabela de razões trigonométricas:

x	$\sin x$	$\cos x$	$\tan x$
$\frac{\pi}{6}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$
$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1
$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$

Solução geral da EDO linear $y' + A(x) \cdot y = B(x)$:

$$y(x) = e^{-P[A(x)]} \cdot P\left[\frac{B(x)}{e^{-P[A(x)]}}\right] + C \cdot e^{-P[A(x)]}$$

(com $C \in \mathbb{R}$), ou ainda,

$$y(x) = \frac{1}{\lambda(x)} \cdot P\left[B(x) \cdot \lambda(x)\right] \quad \text{em que } \lambda(x) = e^{P[A(x)]}.$$

Solução geral da EDO de Bernoulli $y' + A(x) \cdot y = B(x) \cdot y^n$:

$$y(x) = \sqrt[1-n]{e^{(n-1)\cdot P[A(x)]} \cdot (1-n) \cdot P\left[\frac{B(x)}{e^{(n-1)P[A(x)]}}\right] + C \cdot e^{(n-1)\cdot P[A(x)]}}$$

(com $C \in \mathbb{R}$), ou ainda,

$$y(x) = \sqrt[1-n]{\frac{1-n}{\lambda(x)} \cdot P\left[B(x) \cdot \lambda(x)\right]} \quad \text{em que } \lambda(x) = e^{(1-n)\cdot P[A(x)]},$$

FOLHA DE RASCUNHO 1/2 (*mantenha esta folha agrafada às restantes*)

FOLHA DE RASCUNHO 2/2 (*mantenha esta folha agrafada às restantes*)