

Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios de Extremos

1 Extremos Livres

1. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$,
 - (a) Qual a propriedade que $f(\mathbf{a})$ deve verificar para ser um máximo absoluto de f ?
 - (b) Qual a propriedade que $f(\mathbf{a})$ deve verificar para ser um máximo relativo de f ?
2. Dada uma função diferenciável $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, para um ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^2$ encontre a direção $\mathbf{u}$ que torna a derivada direcional máxima $f'_{\mathbf{u}}(\mathbf{a})$ no ponto $\mathbf{a}$.
3. Esta pergunta pretende caracterizar uma propriedade necessária dos extremos relativos das funções de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$.
 - (a) Começemos por relembrar de álgebra linear que o produto interno de dois vetores $\mathbf{u}, \mathbf{v} \in \mathbb{R}^n$ é dado por

$$\mathbf{u}|\mathbf{v} = (u_1, \dots, u_n)|(v_1, \dots, v_n) = u_1v_1 + \dots + u_nv_n$$

- . Dois vetores $\mathbf{w}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$ dizem-se ortogonais quando $\mathbf{w}|\mathbf{h} = 0$. Qual o conjunto de vetores de $\mathbb{R}^3$ ortogonais ao vetor $(1, 1, 1)$?
- (b) Verifique que quando um vetor $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^2$ é tal que $\mathbf{u}|\mathbf{v} = 0$ para todo o $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^2$, então $\mathbf{u} = \mathbf{0}$.
- (c) A condição para a ser um máximo relativo numa função $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável. Use as desigualdades obtidas na pergunta 1 para deduzir que
 - $\frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon} \leq 0$ para $\epsilon > 0$
 - $\frac{g(a+\epsilon)-g(a)}{\epsilon} \geq 0$ para $\epsilon < 0$conclua então que $h'(a) = 0$. Deduza analogamente esta condição para o caso de a ser um mínimo relativo de h .
- (d) Suponha que $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f(x, y) = x^2 + y^2$. Comprove que $\mathbf{0}$ é um mínimo de f .
- (e) Seja $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ a função $g(t) = (t, \sin(t))$. Justifique porque razão $h = f \circ g$, função de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, têm um mínimo em $t = 0$ e usando (c) conclua que $h'(0) = 0$.
- (f) Se a função g da alínea anterior fosse $g(t) = t\mathbf{v} = (tv_1, tv_2)$, para um dado $\mathbf{v} = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2$, verifique que podia tirar uma conclusão análoga.

- (g) Usando o resultado de (f) e o teorema da função composta verifique que $\nabla f(\mathbf{0})|J_g(0) = 0$. Interprete.
- (h) Conclua usando (b) que no ponto mínimo de f se tem $\nabla f(\mathbf{0}) = 0$.
- (i) * ¹ Generalize o resultado da alínea anterior para qualquer função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciável com um extremo relativo num ponto $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, concluindo que $\nabla f(\mathbf{a}) = 0$.
4. O estudo da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ dá uma ideia da dificuldade em encontrar condições suficientes que garantam que um dado ponto crítico é um extremo.
- (a) Verifique que $(0, 0)$ é um ponto crítico de f .
- (b) Determine e classifique (quanto ao sinal) a matriz Hessiana de f em $(0, 0)$ e numa vizinhança de $(0, 0)$. O que podemos concluir a partir das condições necessárias e suficientes discutidas na aula?
- (c) Mostre que $(0, 0)$ é um mínimo de f ao longo de qualquer recta que passa na origem, i.e., que sendo $a, b \in \mathbb{R}$, com $a^2 + b^2 > 0$, e $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $g(t) = (at, bt)$, então $t = 0$ é um mínimo de $f \circ g$.
- (d) Verifique que, no entanto, $(0, 0)$ não é um mínimo de f .
5. Determine os extremos relativos das seguintes funções:
- | | |
|---|--------------------------------------|
| (a) $f(x, y) = xy$ | (f) $f(x, y) = x^3 + y^2 + 2xy - 8x$ |
| (b) $f(x, y) = x^2 + y^2$ | (g) $f(x, y) = -x^3 + 4xy - y^2$ |
| (c) $f(x, y) = x^2 - y^2$ | (h) $f(x, y) = -3y^2 + x^3 + 2xy$ |
| (d) $f(x, y) = x + 2e^y - e^x - e^{2y}$ | (i) $f(x, y) = \sin(xy)$ |
| (e) $f(x, y) = 2^y \log x^2$ | |
6. Calcule, caso existam, os extremos livres das seguintes funções:
- (a) $f(x, y) = 4x^2 - 12xy + 9y^2 + 36x - 54y + 90$
- (b) $f(x, y) = 2x^4 - 4x^2y^2 + 2y^4 + 34$
- (c) $f(x, y) = x^4 + y^4 + 2x^2y^2 - 10x^2 - 10y^2 + 25$
- (d) $f(x, y) = 4x^2y - 4x^4 - y^2 + 1$

¹Exercícios com * são exercícios considerados mais difíceis e que exigem mais tempo e dedicação para a sua resolução.

- (e) $f(x, y, z) = x^2 + yz + 5xz - xy - x^3 + 2y$.
7. Diga, justificando, se a função $g(x, y) = e^{(x-y)}(x^2 - 2y^2)$ tem extremos locais.
8. Discuta, em função do parâmetro $\alpha \in \mathbb{R}$ a existência de extremos livres da seguinte função: $f(x, y) = xy(\alpha - x - y)$.
9. Um problema clássico da estatística é a partir dum conjunto de dados $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$ sobre duas variáveis x e y , encontrar a recta $y(x) = a + bx$ que melhor resuma a relação observada entre as variáveis. Para definir esta relação é suposto uma das variáveis determinar o valor da outra, à primeira chama-se de variável independente e a segunda dependente. No caso em que $y(x) = a + bx$, y é a variável dependente e x independente. Um dos métodos mais comum para encontrar esta relação é o método dos *mínimos quadrados*, que minimiza a distância entre os valores realmente observados para a variável dependente y_i e os valores estimados pela recta $\hat{y}_i = a + bx_i$. Deste modo os parâmetros que definem a reta são encontrados resolvendo o seguinte problema

$$\min_{a,b} \sum_{i=1}^n (y_i - (a + bx_i))^2 \quad (1)$$

- (a) Para os dados $\{(1, 1), (3, 3), (2, 1)\}$ encontre a recta dos mínimos quadrados.
- (b) * Encontre a expressão de a e b da recta dos mínimos quadrados para uma amostra abstrata $\{(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)\}$.

2 Extremos Condicionados

1. Pretendemos determinar quais das seguintes funções têm extremos no domínio definido. Deve sempre que possível usar o Teorema de Weierstrass dos valores extremos. Nos casos em que conclua pela inexistência de algum dos extremos identifique qual a(s) hipótese(s) deste teorema que falha(m).
- (a) $w : \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1, x, y \geq 0\} \rightarrow \mathbb{R}, w(x, y) = xy$
- (b) $g : (1, 2] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, g(x, y) = x$
- (c) $f : (0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \frac{y}{x}$
- (d) $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, h(x, y) = \begin{cases} x + y & \text{se } xy > 0 \\ x/2 & \text{if } xy = 0. \end{cases}$

- (e) $w : \{(x, y) : 0 \leq x + y \leq 1\} \rightarrow \mathbb{R}, w(x, y) = xy$
- (f) $z : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}, z(x) = \begin{cases} x & \text{se } 0 \leq x \leq 1 \\ 1/x & \text{if } 1 < x \leq 2. \end{cases}$
2. Dada uma função $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ e um conjunto de pontos $S = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : g(\mathbf{x}) = 0\}$ com $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. O que se entende por $f(\mathbf{a})$, para $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^n$, ser um máximo relativo ou absoluto de f condicionado a S .
3. Para encontrar os pontos extremos de $f(x, y) = x + y$ sujeitos à restrição $g(x, y) = x^2 + y^2 - 4 = 0$ proceda da seguinte forma:
- (a) Comece por representar graficamente o círculo com os pontos que respeitam a restrição $g(x, y) = 0$ e a curva de nível $f(x, y) = 1$. Deduza em que sentido se deve deslocar a curva de nível de modo a aumentar/diminuir o valor de $f(x, y)$. Encontre os pontos extremos condicionados.
- (b) Use a Lagrangeana para encontrar os pontos críticos e a Hessiana orlada para analisar se são pontos extremos.
4. Determine, graficamente e através do uso da Lagrangeana, os extremos das seguintes funções:
- (a) $f(x, y) = x^2 + y^2 - 4$, sujeita à condição $x + y = 3$.
- (b) $f(x, y) = 4x^2 + y^2 - 4xy$, sujeitos à condição $2y - x = 3$.
- (c) $f(x, y) = x^2y^2$, sujeitos à condição $x + y = 20$.
- (d) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$. restringindo o seu domínio aos pares ordenados $\{(x, y) : y = 2x + 1\}$.
- (e) $f(x, y) = x + y$ sujeita à condição $\frac{x^2}{2} + \frac{y^2}{4} = 1$.
- (f) $f(x, y) = \frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2}$ sujeita à condição $xy + 1 = 0$.
5. (a) Uma empresa necessita de duas matérias primas x e y . para a produção dum bem. A quantidade produzida deste bem é determinada pela seguinte função de produção $f(x, y) = xy$. A empresa detém 6 u.m para investir em matérias primas, e o custo de cada unidade de x é 1 u.m. e de y é de 2 u.m. Formule o problema da empresa de modo a encontrar a produção máxima. Resolva-o.
- (b) Suponha agora que a empresa tem κ u.m. para investir em matérias primas. Resolva o novo problema da empresa, encontrando os valores de produção óptimos de x e y em função de κ , $x(\kappa)$ e $y(\kappa)$.

- (c) Defina o valor máximo a produzir como função da quantidade disponível para investir em matéria prima, *i.e.* $f(\kappa) = f(x(\kappa), y(\kappa))$.
 - (d) Calcule a variação na produção óptima causada pela variação de κ , $\frac{\partial f}{\partial \kappa}$. Compare a alteração com o multiplicador de Lagrange da alínea anterior.
 - (e) Qual o preço mínimo que a empresa estaria disposta a receber pelo produto por si produzido para investir uma u.m. extra?
6. Um agente económico tem uma função de utilidade dada pela seguinte expressão $U(x, y) = (x + 2)(y + 1)$ onde x e y são dois bens por si consumidos. Os preços destes bens são P_x , P_y e o rendimento disponível é M .
- (a) Escreva a restrição orçamental deste agente em função de P_x , P_y e M .
 - (b) Justifique porque razão a restrição orçamental vai estar saturada.
 - (c) Escreva a Lagrangeana que permite encontrar a solução óptima do consumo.
 - (d) Encontre os valores óptimos de x , y e λ .
 - (e) Verifique se a condição de segunda ordem é satisfeita.
 - (f) Verifique o que acontece ao consumo de y quando varia o preço de x .
7. Uma fábrica produz dois tipos de máquinas em quantidades x e y . A função de custo-conjunto é dada pela função $f(x, y) = x^2 + 2y^2 - xy$. Para minimizar o custo, quantas máquinas dos dois tipos devem ser produzidas, se se pretender produzir um total de oito máquinas?
8. Seja $Q = 5x_1x_2$ (em toneladas) a função de produção de certo bem e x_1, x_2 os factores que entram na sua produção. Tomando para preço dos factores $p_1 = 2$, $p_2 = 4$ (em milhares de euros), respectivamente, e pretendendo atingir o nível de produção $Q = 40$, calcule o custo mínimo associado a este nível de produção e os níveis dos factores necessários.
9. Encontre os extremos de:
- (a) $f(x, y, z) = x^2 + 3y^2 + 5z^2$ sujeito a $2x + 3y + 5z = 24$
 - (b) $f(x, y, z) = z$ sujeito a $x^2 + y^2 + z = 5$ e $x + y + z = 1$.
10. Qual o ponto do plano de $\mathbb{R}^3$ definido pela equação $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$ que está à distância mínima de $(-1, 0, 1)$?

11. Uma empresa tem uma função de produção $f(x, y, z) = 1000x^{2/5}y^{1/5}z^{1/5}$, um orçamento de 1600 € e pode comprar cada unidade de x , y e z ao preço de 80 €, 10 € e 20 €. Qual a combinação de inputs que maximizam a produção? Se o preço do output for de 2€ por unidade é vantajoso para a empresa aumentar o investimento em inputs?
12. Calcule os extremos da função $f(x, y, z) = 2x^2 + y + z$ sujeita à condição:

$$\begin{cases} x + y + z = 1/4 \\ x - 2y = 3/4 \end{cases}$$
13. Encontre o máximo da função $2 \ln x + \ln y + \ln z$ sob a condição $x + y + z = 10$. Estime a alteração do valor óptimo quando se altera o termo independente para 11.
14. Como deve um agente económico dividir as suas poupanças em 3 tipos de possibilidades distintas que lhe garantem um retorno de 10 %, 10% e 15%, de modo a minimizar o risco mas mantendo um ganho médio de 12%. Se x, y e z forem as frações investidas no investimento 1, 2 e 3, respectivamente, com $x + y + z = 1$ a variância do retorno é $400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz$. Assim sendo o problema do investidor é

$$\begin{aligned} \min & 400x^2 + 800y^2 + 200xy + 1600z^2 + 400yz \\ \text{s.a } & x + y + 1.5z = 1.2 \\ & x + y + z = 1 \end{aligned}$$

Usando a Lagrangeana encontre a solução óptima deste problema. Interprete os multiplicadores de Lagrange obtidos.

3 Programação Linear

1. Resolva graficamente os seguintes problemas de Programação Linear:

(a)

(b)

(c)

$$\text{Max } Z = 4x + 3.5y$$

$$\text{s.a } x + y \leq 5$$

$$x \leq 3$$

$$x, y \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 7x + 3y$$

$$\text{s.a } 2x + 5y \geq 20$$

$$x + y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

$$\text{Max } Z = 2x + 3y$$

$$\text{s.a } x + 2y \leq 2$$

$$6x + 4y \geq 24$$

$$x, y \geq 0$$

(d)

$$\text{Max } Z = 6x + 5y$$

$$\text{s.a } 5x + 6y \leq 40$$

$$12x + 9y \leq 144$$

$$x = 4y$$

$$x, y \geq 0$$

(e)

$$\text{Max } Z = 40x + 30y$$

$$\text{s.a } x \leq 16$$

$$y \leq 8$$

$$x + 2y \leq 24$$

$$x, y \geq 0$$

2. Recorrendo ao Método do Simplex, resolva os problemas de Programação Linear 1a) e 1e).

3. Considere o conjunto de soluções admissíveis definido pelas seguintes restrições:

$$2x - y \geq -2$$

$$x + 2y \leq 8$$

$$x, y \geq 0$$

Para esse conjunto, determine graficamente:

$$\text{Max } Z = y$$

$$\text{Min } Z = 2x - 2y$$

$$\text{Max } Z = 2x - 2y$$

4. (P1)

(P2)

$$\text{Max } Z = 20x_1 + 6x_2 + 8x_3$$

$$\text{s.a } 8x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leq 200$$

$$4x_1 + 3x_2 \leq 150$$

$$x_3 \leq 20$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

$$\text{Min } Z = 2x_1 - 3x_2 - 4x_3$$

$$\text{s.a } x_1 + 5x_2 - 3x_3 \leq 15$$

$$x_1 + x_2 + x_3 \leq 5$$

$$5x_1 - 6x_2 + 4x_3 \leq 10$$

$$x_1, x_2, x_3 \geq 0$$

(a) Resolva os problemas de Programação Linear recorrendo ao Método do Simplex:

(b) Identifique e interprete o valor os multiplicadores de Lagrange/preço sombra.

5. Considere os seguintes problemas de Programação Linear:

(P1)

$$\text{Max } Z = 2x_1 + 4x_2$$

$$\text{s.a } x_1 + 2x_2 \leq 5$$

$$x_1 + x_2 \leq 4$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(P2)

$$\text{Max } Z = 3x_1 + 7x_2$$

$$\text{s.a } x_1 - x_2 \geq 0$$

$$-3x_1 + 2x_2 \geq 6$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

(P3)

$$\text{Max } Z = x_1 + x_2$$

$$\text{s.a } 4x_1 + 3x_2 \geq 12$$

$$2x_1 - 3x_2 \leq 6$$

$$x_1 \geq 2$$

$$x_1, x_2 \geq 0$$

- (a) Resolva os problemas P1, P2 e P3.
- (b) Identifique o tipo de solução obtida para cada um dos problemas. Justifique.
- (c) Para os problemas com soluções óptimas múltiplas, apresente outra solução óptima.
6. Uma firma produz e comercializa dois tipos de alcatifa. Na produção, são utilizadas duas máquinas, A e B, que funcionam 12 e 14 horas por dia, respectivamente. Para fabricar 100 m² do primeiro tipo de alcatifa, são necessárias 3 horas de trabalho na máquina A e 7 horas na máquina B. A mesma quantidade de alcatifa do tipo 2 requer 4 horas e 2 horas, respectivamente nas máquinas A e B. Sabe-se ainda que o lucro obtido com a produção de 100m² do primeiro tipo de alcatifa é de 4 u.m. e que o correspondente valor para o tipo 2 é de 3u.m. Qual deve ser o plano diário de produção de alcatifas, de modo a garantir um lucro máximo? Qual a utilização diária das máquinas? Formule o problema, resolva-o e interprete a solução obtida.
7. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\text{Max } Z = 7x + 3y$$

$$\text{s.a } 2x + y \leq 10$$

$$8x + y \leq 20$$

$$3x - y \leq 9/2$$

$$x, y \geq 0$$

- (a) Resolva-o graficamente.
- (b) Determine o intervalo de variação para o coeficiente de x na função objectivo (c1), de modo a que o ponto óptimo se mantenha.

- (c) Determine o intervalo de variação para o coeficiente de y na função objectivo (c2), de modo a que o ponto óptimo se mantenha.
- (d) Determine as variações possíveis para os termos independentes das restrições, de modo a que a base óptima se mantenha.

8. Considere o seguinte problema de Programação Linear:

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= x_1 + x_2 \\
 \text{s.a } & 2x_1 + 3x_2 \geq 6 \\
 & 5x_1 + 4x_2 \leq 20 \\
 & 4x_1 + 5x_2 \leq 20 \\
 & x_1, x_2 \geq 0
 \end{aligned}$$

- (a) Resolva-o graficamente.
- (b) Efectue a análise de sensibilidade de x_1 na F.O. e do termo independente associado à primeira restrição.

4 Soluções dos Exercícios Propostos

4.1 Extremos Livres

1.

2.

3.

4.

5. Temos os seguintes pontos de extremo:

(a) $\bar{\mathbf{0}}$ ponto de sela

(b) $\bar{\mathbf{0}}$ mínimo.

(c) $\bar{\mathbf{0}}$ é ponto de sela.

(d) $\bar{\mathbf{0}}$ é máximo.

(e) A função não tem extremos relativos.

(f) $(2, -2)$ mínimo e $(-4/3, 4/3)$ é ponto de sela.

(g) $8/3(1, 2)$ máximo e $\mathbf{0}$ é ponto de sela.

(h) $-2/9(1, 3^{-1})$ máximo e $\mathbf{0}$ é ponto de sela.

(i) Temos que $\left(-\frac{\frac{\pi}{2} + k\pi}{y}, y\right), y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ representa uma família de pontos de máximo e $\left(-\frac{-\frac{\pi}{2} + k\pi}{y}, y\right), y \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$ representa uma família de pontos de mínimo.

6. Temos as seguintes famílias de extremos:

(a) $\left(\frac{3y-9}{2}, y\right), y \in \mathbb{R}$ família de pontos de mínimo situados na recta de equação $2x - 3y + 9 = 0$ (função sempre positiva)

(b) $(\pm y, y), y \in \mathbb{R}$ família de pontos de mínimo situados nas rectas $x = \pm y$

(c) $(\pm\sqrt{5-y^2}, y), y \in]-\sqrt{5}, \sqrt{5}[$ família de pontos de mínimo situados na circunferência de equação $x^2 + y^2 = 5$

- (d) $(x, 2x^2)$, $x \in \mathbb{R}$ família de pontos de máximo situados na parábola de equação $y = 2x^2$.
- (e) $\left(-2 - \sqrt{2/3}, -10 + 5\sqrt{2/3}, -\sqrt{2/3}\right)$ e $\left(-2 + \sqrt{2/3}, 10 - 5\sqrt{2/3}, \sqrt{2/3}\right)$ pontos de sela.
7. $(2, -4)$ é máximo e $\mathbf{0}$ é um ponto de sela.
8. $(0, 0)$, $(\alpha, 0)$, $(0, \alpha)$ não são máximos nem mínimos. $(\alpha/3, \alpha/3)$ é mínimo se $\alpha < 0$, é um máximo quando $\alpha > 0$.
- 9.

4.2 Extremos Condicionados

1. (a) A função w tem máximo e mínimo pelo teorema de Weirstrass.
 - (b) A função g tem máximo mas não tem mínimo. O domínio da função g , D_g não é fechado.
 - (c) A função tem mínimo mas não tem máximo. D_f não é fechado, (mas f é contínua em D_f).
 - (d) A função h tem máximo e mínimo. h não é contínua.
 - (e) A função tem máximo, mas não tem mínimo. D_w é ilimitado.
 - (f) A função tem máximo e mínimo pelo teorema de Weirstrass.
- 2.
3. $(x, y) = 2^{\frac{1}{2}}(1, 1)$ é máximo e $(x, y) = -2^{\frac{1}{2}}(1, 1)$ é mínimo
4. (a) $(3/2, 3/2)$ é um mínimo condicionado
- (b) $(1, 2)$ é um mínimo condicionado.
- (c) $(10, 10)$ máximo condicionado, $(0, 20)$ e $(20, 0)$ mínimos condicionados
- (d) $(2/3, -1/3)$ é um mínimo condicionado
- (e) $\sqrt{2/3}(-1, -2)$ mínimo condicionado e $\sqrt{2/3}(1, 2)$ máximo condicionado
- (f) Mínimos condicionados em $(-1, 1)$ e $(1, -1)$
5. (a)

$$\text{Max } Z = xy$$

$$\text{s.a } x + 2y \leq 6$$

$$x, y \geq 0$$

$$(x, y) = 3(1, \frac{1}{2})$$

$$(b) \quad (x(\kappa), y(\kappa)) = (\frac{\kappa}{2}, \frac{\kappa}{4})$$

$$(c) \quad f(\kappa) = f(x(\kappa), y(\kappa)) = x(\kappa)y(\kappa) = \frac{\kappa^2}{8}$$

$$(d) \quad \frac{\partial f(\kappa)}{\partial \kappa} = \frac{\kappa}{4} = \lambda$$

$$(e) \quad p > \frac{1}{\lambda}.$$

6. (a)

$$\text{Max } Z = (x + 2)(y + 1)$$

$$\text{s.a} \quad P_x x + P_y y \leq M$$

$$x, y \geq 0$$

$$(b) \quad \nabla f(x, y) \geq 0$$

$$(c)$$

$$(d)$$

$$\begin{cases} x^* = \frac{M - 2P_x + P_y}{2P_x} \\ y^* = \frac{M + 2P_x - P_y}{2P_y} \\ \lambda^* = \frac{M + 2P_x + P_y}{2P_x P_y} \end{cases}$$

$$(e)$$

$$(f) \quad \frac{\partial x^*}{\partial P_y} = \frac{1}{2P_x}$$

7.

8. Custo mínimo para $(x, y) = (5, 3)$.

9. Mínimo em $(4, 2)$ e o custo mínimo é 16000.

(a) $(2, 1, 1)$ é mínimo.

(b) $(-1, -1, 3)$ mínimos e $(2, 2, 3)$ máximo.

10. $(-15/14, -1/7, 11/4)$.

11. $(x, y, z; \lambda) = (10, 40, 20; 200)$ máximo.

12. $(x, y, z; \lambda_1, \lambda_2) = (1/4, -1/4, 1/4; 1, 0)$ é mínimo.

13. $(x, y, z; \lambda) = (4, 2, 2; 32)$ máximo.

14. $(x, y, z) = (1/2, 1/10, 2/5)$ é mínimo.

4.3 Programação Linear

1. (a) Solução ótima: $x = 3, y = 2$; valor ótimo: $z = 19$.
 (b) Solução ótima: $x = 20/3, y = 4/3$; valor ótimo: $z = 152/3$.
 (c) Problema impossível.
 (d) Solução ótima: $x = 80/13, y = 20/13$; valor ótimo: $z = 580/13$.
 (e) Solução ótima: $x = 16, y = 4$; valor ótimo: $z = 760$.
- 2.
3. (a) Solução ótima: $x = 4/5, y = 18/5$; valor ótimo: $z = 18/5$.
 (b) Solução ótima: $x = 4/5, y = 18/5$; valor ótimo: $z = -28/5$.
 (c) Solução ótima: $x = 8, y = 0$; valor ótimo: $z = 16$.
4. (a) (P1) Solução ótima: $x_1 = 15/2, x_2 = 40, x_3 = 20, s_1 = s_2 = s_3 = 0$; valor ótimo: $z = 550$;
 (P2) Solução ótima: $x_1 = 0, x_2 = 1, x_3 = 4, s_1 = 22, s_2 = s_3 = 0$; valor ótimo: $z = -19$
 (b)
5. (a) Soluções ótimas múltiplas; Solução ótima: $(x_1, x_2) = \alpha(0, 5/2) + (1 - \alpha)(3, 1)$ para $\alpha \in [0, 1]$
 (b) Problema impossível.
 (c) Solução ilimitada.
- 6.

$$\begin{aligned}
 \text{Max } Z &= 4x + 3y \\
 \text{s.a } &3x + 4y \leq 12 \\
 &7x + 2y \leq 14 \\
 &x, y \geq 0
 \end{aligned}$$

Solução ótima: $x = 16/11; y = 21/11$; valor ótimo: $z = 127/11$ (ou seja, produção ótima diária de alcatifas dos tipos 1 e 2: $16/11m^2$ e $21/11m^2$, respectivamente; lucro máximo diário: $127/11 \text{ u.m.}$; diariamente, as horas disponíveis nas máquinas são consumidas na totalidade).

7. (a) Valor ótimo: $z = 95/3$; Solução ótima: $x = 5/3$ e $y = 20/3$;

- (b) $c_1 \in [6, 24]$
 - (c) $c_2 \in [7/8, 7/2]$
 - (d) $b_1 \in [73/11, 20]$, $b_2 \in [10, 137/5]$ e $b_3 \in [-5/3, +\infty[$
8. (a) Valor óptimo: $z = 40/9$; Solução óptima: $x_1 = 20/9$ e $x_2 = 20/9$;
- (b) $c_1 \in [4/5, 5/4]$