

PRIMITIVAS

Acetatos de apoio às aulas de Optimização - GA2 / EA2 / FCA3

Sofia Lopes Portela
DMQ - ISCTE-IUL

Ano lectivo 2010/11

1. DEFINIÇÃO DE PRIMITIVA

Chama-se primitiva de $f(x)$ à função $F(x)$ que tem por derivada $f(x)$, ou seja,

$$P[f(x)] = F(x) + c$$

em que c é uma constante. Ou seja, a primitivação é a operação inversa da derivação.

2. PRIMITIVAS IMEDIATAS E QUASE-IMEDIATAS

Primitivas imediatas – primitivas que resultam da aplicação directa de regras que resultam da inversão da derivação.

Primitivas quase-imediatas – primitivas que necessitam de algumas operações preliminares antes da aplicação das regras.

3. MÉTODOS DE PRIMITIVAÇÃO

3.1. Método de primitivação por decomposição

$$P[f_1 + f_2 + \dots + f_n] = P[f_1] + P[f_2] + \dots + P[f_n]$$

3.2. Método de primitivação por partes

$$P[u.v] = P[u].v - P[P[u].v']$$

Quadro 1 - Algumas sugestões para escolha da função u e da função v

Função	u	v
$f(x)e^x$	e^u	$f(x)$
$f(x)\text{sen } x$	$\text{sen } x$	$f(x)$
$f(x)\text{cos } x$	$\text{cos } x$	$f(x)$
$f(x)\text{tg } x$	$\text{tg } x$	$f(x)$
$f(x)\text{cot } g x$	$\text{cot } g x$	$f(x)$
$f(x)\log x$	$f(x)$	$\log x$

3.3. Método de primitivação por substituição

$$P[f(x)] = P[f(\varphi(t)) \cdot \varphi'(t)] = \Phi(t) = \Phi[\varphi^{-1}(x)]$$

em que a substituição é dada por $x = \varphi(t)$.

Quadro 2 - Algumas sugestões para a escolha da substituição

Função com	$x = \varphi(t)$	$\varphi'(t)$	$t = \varphi^{-1}(x)$
$\sqrt{a^2 - x^2}$	$a \cdot \text{sen } t$	$a \cdot \text{cos } t$	$\text{arcsen } \frac{x}{a}$
$\sqrt{a^2 + x^2}$	$a \cdot \text{tg } t$	$a \cdot \text{sec}^2 t$	$\text{arctg } \frac{x}{a}$
$\sqrt{x^2 - a^2}$	$a \cdot \text{sec } t$	$a \cdot \text{sec } t \cdot \text{tg } t$	$\text{arc sec } \frac{x}{a}$
e^{kx}	$\log t$	$\frac{1}{t}$	e^x
$\log^k x$	e^t	e^t	$\log x$

4. PRIMITIVAÇÃO DE FUNÇÕES RACIONAIS

Função racional – uma função racional consiste num quociente de dois polinómios, isto é,

$$f(x) = \frac{N(x)}{D(x)}$$

em que $N(x)$ e $D(x)$ são dois polinómios de variável x .

Quadro 3 - Tipos de funções racionais

Tipo de função racional	
Própria	Se o grau do polinómio $N(x)$ é inferior ao grau do polinómio $D(x)$
Imprópria	Se o grau do polinómio $N(x)$ é superior ou igual ao grau do polinómio $D(x)$

Cálculo de primitivas de funções racionais próprias - determina-se as raízes de $D(x)$ e procede-se a decomposição de $D(x)$ em factores lineares (se as raízes forem reais) e em factores de 2º grau (somas de quadrados se as raízes foram complexas). As constantes das fracções simples calculam-se pelo Método dos Coeficientes Indeterminados ou outros métodos conhecidos.

Cálculo de primitivas de funções racionais impróprias – faz-se a divisão dos dois polinómios obtendo-se um quociente e um resto (este último de grau inferior a $D(x)$). Fica então

$$P\left[\frac{N(x)}{D(x)}\right] = P\left[Quociente + \frac{Re\ sto}{Divisor}\right]$$

5. EXERCÍCIOS DE EXAMES

- Calcule a expressão geral das primitivas de:

Exame 14/01/2008

- ❖ $x e^{x^2} - \operatorname{tg} x$

- ❖ $x \cos x$

- Determine a expressão geral das primitivas de

1º Teste- 6/04/2010

$$f(x) = \frac{x^3 + x^7}{\sqrt{4 - x^8}} + \frac{1}{x^3 + x^2}$$