

INTEGRAIS

Acetatos de apoio às aulas de Optimização - GA2 / EA2 / FCA3

Sofia Lopes Portela
DMQ - ISCTE

Ano lectivo 2010/11

1. DEFINIÇÃO DE INTEGRAL DE RIEMANN

$$\int_a^b f(x) dx \quad \text{integral de f no intervalo } [a, b]$$

$f(x)$ - função integranda

x - variável de integração

a, b - extremos de integração

$[a, b]$ - intervalo de integração

Condição necessária de integrabilidade:

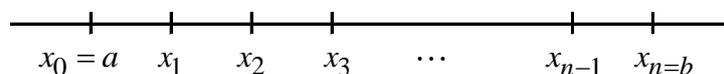
- Se $f(x)$ é integrável em $[a, b]$, então $f(x)$ é limitada em $[a, b]$.



- Se $f(x)$ não é limitada em $[a, b]$, então $f(x)$ não é integrável em $[a, b]$.

2. SOMAS DE DARBOUX

Seja $f(x)$ uma função definida no intervalo $[a, b]$, o qual vamos considerar decomposto em n intervalos pelos pontos x_1, x_2, \dots, x_{n-1} , conforme representado na seguinte recta:



Soma inferior de Darboux:
$$s_D = \sum_{i=0}^{n-1} l_i (x_{i+1} - x_i)$$

Soma superior de Darboux:
$$S_D = \sum_{i=0}^{n-1} L_i (x_{i+1} - x_i)$$

em que l_i e L_i são, respectivamente, o ínfimo e o supremo de $f(x)$ no intervalo $[x_i, x_{i+1}]$.

Condição necessária e suficiente de integrabilidade - $f(x)$ é integrável no sentido de Riemann, se e só se as somas de Darboux têm o mesmo limite finito (que é o integral de Riemann).

3. CLASSES DE FUNÇÕES INTEGRÁVEIS

- As funções contínuas no intervalo $[a, b]$ são integráveis, nesse intervalo, no sentido de Riemann.
- As funções monótonas e limitadas são integráveis no sentido de Riemann.

4. INTERPRETAÇÃO GEOMÉTRICA DO CONCEITO DE INTEGRAL

Sendo $f(x)$ uma função contínua não negativa no intervalo $[a, b]$, então $\int_a^b f(x) dx$ representa a área do trapezóide definido por $f(x)$ em $[a, b]$.

5. ALGUMAS APLICAÇÕES DOS INTEGRAIS

- Cálculo de áreas planas
- Cálculo de volumes de sólidos
- Cálculo de comprimento de linhas
- ...

6. ALGUMAS PROPRIEDADES DOS INTEGRAIS

- $\int_a^b f(x) dx = -\int_b^a f(x) dx$
- $\int_{-a}^{-b} f(x) dx = -\int_a^b f(x) dx$ se f for uma função par

Nota: Uma função diz-se par sse $f(x) = f(-x)$, ou seja, se os elementos simétricos têm imagens iguais.

Exemplo de uma função par: $f(x) = x^2$

- $\int_{-a}^{-b} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx$ se f for uma função ímpar

Nota: Uma função diz-se ímpar sse $f(x) = -f(-x)$, ou seja, se os elementos simétricos têm imagens simétricas.

Exemplo de uma função ímpar: $f(x) = x^3$

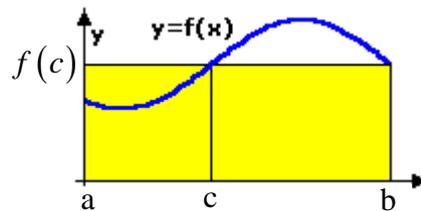
- $\int_a^b 1 dx = b - a$
- $\int_a^b c f(x) dx = c \int_a^b f(x) dx$
- $\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx$ em que $c \in]a, b [$

7. TEOREMA DA MÉDIA DO CÁLCULO INTEGRAL

Seja $f(x)$ uma função integrável em $[a, b]$, existe um número $\lambda \in [l, L]$ (em que l e L são respectivamente o ínfimo e o supremo de $f(x)$ nesse intervalo tal que

$$\int_a^b f(x) dx = \lambda(b-a)$$
$$\Leftrightarrow \int_a^b f(x) dx = f(c)(b-a)$$

em que c é um ponto do intervalo $[a, b]$.



8. INTEGRAL INDEFINIDO

$$\Phi(x) = \int_a^x f(t) dt$$

- Integrais indefinidos de origem diferente diferem de uma constante.
- O integral indefinido é uma constante.
- O integral indefinido tem por derivada a função integranda nos pontos em que esta seja contínua (Teorema Fundamental do Cálculo Integral).

Regra de derivação de um integral indefinido

$$\frac{d}{dx} \int_{h(x)}^{g(x)} f(t) dt = f[g(x)]g'(x) - f[h(x)]h'(x)$$

9. FÓRMULA DE BARROW

Seja f uma função contínua no intervalo $[a, b]$ e F uma sua primitiva no mesmo intervalo.

Então,

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a) = [F(x)]_a^b$$

10. MÉTODOS DE INTEGRAÇÃO

10.1. Método de integração por decomposição

$$\int_a^b (f_1(x) + \dots + f_n(x)) dx = \int_a^b f_1(x) dx + \dots + \int_a^b f_n(x) dx$$

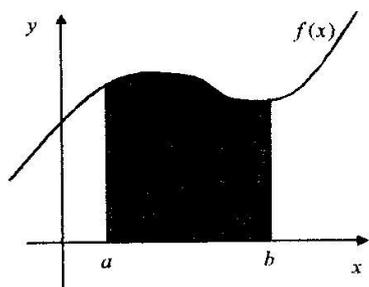
10.2. Método de integração por partes

$$\int_a^b uv dx = [Uv]_a^b - \int_a^b Uv' dx \quad \text{em que } U = P[u]$$

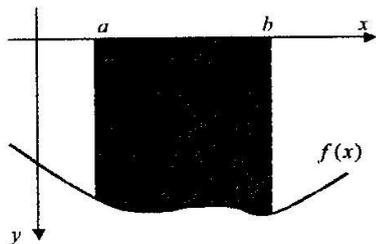
10.3. Método de integração por substituição

$$\int_a^b f(x) dx = \int_{\varphi^{-1}(a)}^{\varphi^{-1}(b)} f[\varphi(t)] \cdot \varphi'(t) dt$$

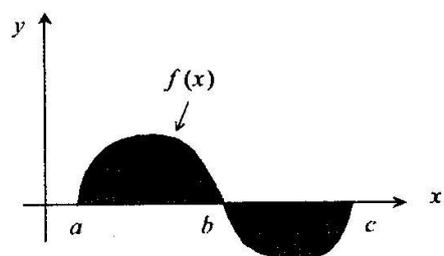
11. APLICAÇÃO DOS INTEGRAIS AO CÁLCULO DE ÁREAS PLANAS



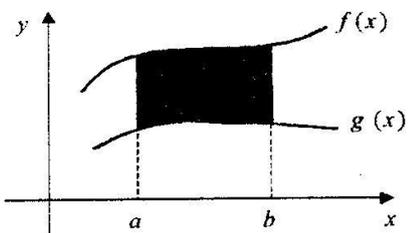
$$A = \int_a^b f(x) dx$$



$$A = - \int_a^b f(x) dx$$



$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_b^c f(x) dx$$



$$A = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

12. EXERCÍCIOS DE EXAMES

- $\int_2^3 \frac{2x}{\sqrt{4-x}} dx$ *Exame 13/07/2004*

- $\int_1^2 \frac{1}{x^3 \sqrt{(2-3 \ln x)^2}} dx$ *Teste 24/04/2004*

- $\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \frac{\text{sen}(2x)}{1-\cos^2 x} dx$ *1º Teste 6/04/2010*

- $\int_{\sqrt{3}}^3 \frac{1}{x^2 \sqrt{x^2+9}} dx$

- Calcule a área definida por $y \leq x$, $y \leq -x^2 + 2$, $y \geq x^2$. *Exame 21/06/2003*

- Determine a área do domínio plano definido pelas condições *1º Teste 6/04/2010*
 $-1 \leq y \leq x-2 \quad \wedge \quad y \leq -\ln(x-1)$