[Elaborado por Rosário Laureano]

1 Séries numéricas e séries funcionais

1.1 Séries numéricas

Dada uma sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de números reais,

$$(u_n) : u_1,\ u_2,\ u_3,\ \cdots\ u_n,\ u_{n+1},\ \cdots ,$$

(a cada número natural n está associado o termo u_n de ordem n) podemos considerar a adição de todos os seus termos, uma infinidade de parcelas. É o que se pretende com o conceito de série numérica.

Definition 1 *A **série numérica** de termo geral u_n, que se denota por $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ ($\sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n$, $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou simplesmente $\sum\limits_{n} u_n$), é a soma infinita dos termos da sucessão real $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = u_1 + u_2 + u_3 + \cdots + u_{n-1} + u_n + u_{n+1} + \cdots .$$

Embora o termo geral da série seja o termo geral da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, a série $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ é distinta da sucessão $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ que lhe está associada. Enquanto na primeira os termos estão adicionados entre si, na segunda estão "soltos" como sequência ordenada.

Example 2 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1}(2n+1) = (2\cdot 1+1) + (2\cdot 2+1) + (2\cdot 3+1) + \cdots = 3+5+7+\cdots$$

tem $u_n = 2n+1$ como termo geral. É "gerada" pela sucessão real $(2n+1)_{n\in\mathbb{N}}$.

Uma série numérica pode estar definida paenas para valores de n a partir de uma certa ordem k. Nesse caso, escreve-se

$$\sum_{n\geq k} u_n = u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots + u_k + u_{k+1} + u_{k+2} + \cdots .$$

Também se podem considerar séries numéricas com início em $n=0$, $\sum\limits_{n\geq 0} u_n$.

Example 3 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n-\sqrt{n}}=\frac{1}{2-\sqrt{2}}+\frac{1}{3-\sqrt{3}}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5-\sqrt{5}}+\cdots$$

tem $u_n = 1/\left(n-\sqrt{n}\right)$ *como termo geral e este apenas está bem definido como número real para* $n \geq 2$.

A série numérica como termo geral $u_n = 2n+1$ *que inicia em* $n=0$ *é*

$$\sum_{n\geq 0}(2n+1)=(2\cdot 0+1)+(2\cdot 1+1)+(2\cdot 2+1)+\cdots=1+3+5+\cdots .$$

Dada uma série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, pode acontecer que o limite

$$\lim_n \left(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n\right)$$

exista como número real (i.e., seja finito). Neste caso a série diz-se **convergente** e o valor S desse limite diz-se a **soma** da série. No caso contrário, se não existe esse limite ou se é $+\infty$ ou $-\infty$, a série numérica diz-se **divergente**. Classificar uma série numérica como convergente ou divergente é identificar a sua **natureza**. Temos a seguinte definição rigorosa.

Definition 4 *Dada uma série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$, *define-se a sua* ***sucessão das somas parciais*** *por* $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} u_i$, *ou seja,*

$$\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}: u_1, \quad u_1+u_2, \quad u_1+u_2+u_3, \quad \ldots$$

se a sucessão das somas parciais $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *for convergente com limite* S,

$$\lim_n S_n = \lim_n \left(u_1+u_2+u_3+\cdots+u_{n-1}+u_n\right)=S,$$

a série diz-se ***convergente*** *e o valor* S *diz-se a* ***soma da série****; se a sucessão das somas parciais* $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *for divergente, a série diz-se* ***divergente****.*

Deste modo, a sucessão das somas parciais $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ determina a natureza da série numérica. Note que a sucessão $\left(S_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ de somas parciais é distinta da sucessão $\left(u_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ que define a série. À primeira corresponde a sequência

$$S_1=u_1, \quad S_2=u_1+u_2, \quad S_3=u_1+u_2+u_3, \quad \ldots \quad S_n=u_1+u_2+\cdots+u_n, \quad \ldots$$

enquanto à segunda corresponde a sequência

$$u_1, \quad u_2, \quad u_3, \quad \ldots \quad u_n, \ldots .$$

A convergência de uma série traduz-se no essencial por: "a soma de todos (portanto, em número infinito) os termos da série acumula/não-excede um determinado valor; esse valor, conforme é intuitivo, é a soma da série".

Example 5 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{10} + \cdots ,$$

designada por ***série harmónica****. Prova-se por análise da subsucessão dos termos de ordem* 2^n *da sucessão* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *das somas parciais que se trata de uma série divergente. De facto, temos*

$$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad e \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}.$$

Atendendo a que $1/3 > 1/4$ *o quatro termo de* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *verifica (no que segue o uso de parêntesis é dispensável)*

$$S_4 = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) > \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \left(2 \cdot \frac{1}{4}\right) = \left(1 + \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2}.$$

Analogamente, atendendo a que $1/5 > 1/8$*,* $1/6 > 1/8$ *e* $1/7 > 1/8$ *e à desigualdade anterior, também*

$$\begin{aligned} S_8 &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) > \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(4 \cdot \frac{1}{8}\right) \\ &= \left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + 3 \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Atendendo a que $1/9 > 1/16$*,* $1/10 > 1/16$*,* $\ldots$ *e* $1/15 > 1/16$*, o termo* S_{16} *verifica*

$$\begin{aligned} S_{16} &= \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \cdots + \frac{1}{15} + \frac{1}{16}\right) \\ &> \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + \left(8 \cdot \frac{1}{16}\right) = \left(1 + 3 \cdot \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2} = 1 + 4 \cdot \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Pelo mesmo processo se obtém

$$S_{32} = 1 + 5 \cdot \frac{1}{2}$$

e assim por diante. Note ainda que $S_1 = 1 + 0 \cdot \frac{1}{2}$ *e* $S_2 = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2}$*. Dado que* $1 = 2^0$, $2 = 2^1$, $4 = 2^2$, $8 = 2^3$, $16 = 2^4$, $32 = 2^5$ *etc, concluímos que*

$$S_{2^n} \geq 1 + n \cdot \frac{1}{2}.$$

Como tal,

$$\lim_n S_{2^n} \geq \lim_n \left(1 + n \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + \left(+\infty \cdot \frac{1}{2}\right) = 1 + \infty = +\infty,$$

o que mostra que a sucessão $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *das somas parciais não converge para um valor finito (os termos* S_{2^n} *constituem uma subsucessão da sucessão* $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$*).*

Example 6 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{100} + \cdots ,$$

designada por série de Dirichlet com $\alpha = 2$*, é convergente. As* ***séries de Dirichlet*** *têm a forma geral*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha},$$

com $\alpha \in \mathbb{R}$*. São convergentes se* $\alpha > 1$ *e divergentes se* $\alpha \leq 1$*. Note que a série harmónica é um caso particular de série de Dirichlet (com* $\alpha = 1$*).*

Example 7 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{1024} + \cdots$$

é convergente e tem soma $S = 1$*. É uma série geométrica de razão* $r = 1/2$ *porque a sucessão* $u_n = 1/2^n$*, que é termo geral da série, é uma progressão* *geométrica de razão $r = 1/2$ (cada termo resulta da multiplicação do termo anterior por $1/2$). Uma* ***série geométrica*** *tem a forma geral*

$$\sum_{n\geq 1} \left(a \cdot r^{n-1}\right),$$

com $a, r \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O número real r é a razão da série numérica e a é o valor do seu primeiro termo. O termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = (n+1)\, a$$

quando $r = 1$ (trata-se da série de termo geral constante igual a a), e é dado por

$$S_n = \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r}$$

quando $r \neq 1$. Concluímos então que a série é convergente se $|r| < 1$ (ou seja, se $-1 < r < 1$) com soma S igual a

$$S = \lim_n \frac{a\,(1 - r^n)}{1 - r} = \frac{a}{1 - r}\left(1 - \lim_n r^n\right) = \frac{a}{1 - r}$$

(note que se $-1 < r < 1$ então $r^n \to 0$), e é divergente se $|r| \geq 1$ (ou seja, se $r \leq -1 \vee r \geq 1$) (note que se $r = 1$ temos $S_n = (n+1)\, a \to +\infty \cdot a = \infty$, se $r > 1$ temos $r^n \to +\infty$, e se $r \leq -1$ não existe o limite de r^n). Portanto, se $-1 < r < 1$ podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1} \left(a \cdot r^{n-1}\right) = a + a \cdot r + a \cdot r^2 + a \cdot r^3 + \ldots + a \cdot r^n + \cdots = \frac{a}{1 - r}.$$

Example 8 *A série numérica $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n\,(n+2)}\right)$ é convergente e tem soma $S = 3/4$. É uma série de Mengoli (ou telescópica) porque existe $p \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n\,(n+2)}\right) = \sum_{n\geq 1} \left(a_n - a_{n+p}\right).$$

Na verdade, dada a igualdade

$$\frac{1}{n\,(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2\,(n+2)},$$

temos

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n\,(n+2)}\right) &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2n}-\frac{1}{2\,(n+2)}\right)\\ &= \left(\frac{1}{2}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{6}-\frac{1}{10}\right)+\left(\frac{1}{8}-\frac{1}{12}\right)+\cdots\end{aligned}$$

com $a_n = 1/(2n)$ *e* $p = 2$. *Uma* ***série de Mengoli*** *(**telescópica** ou **redutível**) tem a forma geral*

$$\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+p}),$$

com $p \in \mathbb{N}$. *O termo geral da sucessão de somas parciais é dado por*

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n.$$

Concluímos então que a série é convergente se existir, e com valor finito, o limite $\lim a_n$ *e é divergente no caso contrário. Quando existe, a soma da série é dada por*

$$S = \lim_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot \lim_n a_n$$

e podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1}(a_n - a_{n+p}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot \lim_n a_n.$$

Ao contrário do que sucede com as séries geométricas e de Mengoli, para muitas outras séries numéricas $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ não é possível estabelecer uma expressão analítica do termo geral $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ da sucessão de somas parciais. Tal impede o cálculo do limite de S_n e a obtenção do valor da soma S da série. No entanto, existem vários critérios que permitem identificar a sua natureza.

Proposition 9 ***(Critério geral de convergência, condição necessária de convergência** ou **critério do termo geral)*** *Se a série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *é convergente então*

$$\lim_n u_n = 0.$$

Proof. *Temos* $S_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n$ *e* $S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}$ *(para* $n > 1$*). Assim, para* $n > 1$*, temos*

$$S_n - S_{n-1} = u_1 + u_2 + \cdots + u_n - (u_1 + u_2 + \cdots + u_{n-1}) = u_n.$$

Dado que a série é convergente, existe o limite de S_n*. Suponhamos que* $\lim_n S_n = l$*. Também* $\lim_n S_{n-1} = l$*, donde*

$$\lim_n u_n = \lim_n (S_n - S_{n-1}) = l - l = 0$$

conforme se pretende demonstrar ■

Em consequência deste resultado (por contra-recíproco), se $\lim_n u_n \neq 0$ então a série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ é divergente,

$$\boxed{\lim_n u_n \neq 0 \quad \Longrightarrow \quad \sum_{n\geq 1} u_n \text{ série divergente}}.$$

De salientar que para que uma série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ seja convergente, **NÃO BASTA** (não é suficiente) que o seu termo geral u_n convirja para 0 (como mostram os exemplos $\sum_{n\geq 1} (1/n)$ ou $\sum_{n\geq 1} (1/\sqrt{n})$), no entanto, tal é necessário.

Example 10 *As séries numéricas*

$$\sum_{n\geq 1} 2^n, \ \sum_{n\geq 1} (-2)^n, \ \sum_{n\geq 1} \left(-\frac{1}{3}\right), \ \sum_{n\geq 1} (-1)^n, \ \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} \quad e \quad \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{n}$$

são divergentes, atendendo ao critério geral de convergência. De facto, não existem os limites

$$\lim_n (-2)^n \quad e \quad \lim_n (-1)^n,$$

e, para as restantes séries numéricas, temos os seguintes limites não-nulos

$$\lim_n 2^n = 2^{+\infty} = +\infty, \qquad \lim_n \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{1}{3},$$

$$\begin{aligned}\lim_n \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^{2n} &= \lim_n \left(1-\frac{3}{n+5}\right)^{2n} = \lim_n \left[\left(1-\frac{3}{n+5}\right)^{n+5}\right]^{\frac{2n}{n+5}} \\ &= \left(e^{-3}\right)^2 = e^{-6} = \frac{1}{e^6},\end{aligned}$$

(note que $\lim_n 2n/(n+5) = \lim_n 2n/n = \lim_n 2 = 2$*) e*

$$\lim_n \frac{n+1}{n} = \lim_n \left(1+\frac{1}{n}\right) = 1+0 = 1.$$

Proposition 11 *Se as séries numéricas* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *e* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *são convergentes e têm somas* S *e* S'*, respectivamente, então a série numérica* $\sum_{n\geq 1}(u_n + v_n)$ *também é convergente e tem soma* $S + S'$*.*

Proposition 12 *Se a série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente e tem soma* S *então a série numérica* $\sum_{n\geq 1}(\alpha \cdot u_n)$*, com* $\alpha \in \mathbb{R}$*, também é convergente e tem soma* $\alpha \cdot S$*.*

Resulta das Proposições 10 e 11 que se duas séries numéricas $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ são convergentes e têm somas S e S', respectivamente, então a série numérica $\sum_{n\geq 1}(\alpha \cdot u_n + \beta \cdot v_n)$, com $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, também é convergente e tem soma $\alpha \cdot S + \beta \cdot S'$.

Example 13 *Sabendo que as séries* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{2^n}$ *e* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ *são convergentes podemos concluir que também é convergente a série numérica* $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{3}{2^n} + \frac{1}{4n^2}\right)$ *(temos* $\alpha = 3$ *e* $\beta = 1/4$*).*

Proposition 14 *Se a série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente e tem soma* S *e a série numérica* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *é convergente e tem soma* S' *então*

$$\sum_{n\geq 1}(u_n * v_n) \leq S * S'.$$

Proposition 15 ***(Critério da comparação - formulação 1)*** *Sejam* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *e* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *duas séries numéricas tais que, a partir de certa ordem, se tem* $u_n, v_n \geq 0$ *e* $v_n \leq u_n$*. Então, a convergência da série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *implica a convergência da série* $\sum_{n\geq 1} v_n$*,*

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} u_n \text{ série convergente} \implies \sum_{n\geq 1} v_n \text{ série convergente}},$$

e a divergência da série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *implica a divergência da série* $\sum_{n\geq 1} u_n$*,*

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} v_n \text{ série divergente} \implies \sum_{n\geq 1} u_n \text{ série divergente}}.$$

Example 16 *As séries numéricas* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *de termo geral*

$$v_n = \frac{1}{n^2+1}, \quad v_n = \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}, \quad v_n = \frac{3n-1}{n^3}, \quad v_n = \frac{1}{\sqrt{n^n}} \quad e \quad v_n = \frac{1}{2^n+n}$$

são convergentes pelo critério da comparação - formulação 1. De facto, são válidas para todo o n *as desigualdades*

$$0 < \frac{1}{n^2+1} < \frac{1}{n^2},$$

$$0 < \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2} = \frac{2n+1}{n^2(n^2+2n+1)} = \frac{1}{n^2} \cdot \frac{2n+1}{n^2+2n+1} < \frac{1}{n^2} \cdot 1 = \frac{1}{n^2}$$

e

$$0 < \frac{3n-1}{n^3} < \frac{3n}{n^3} = \frac{3}{n^2},$$

e é válida, a partir da ordem $n = 4$ *(inclusive),a desigualdade*

$$0 < \frac{1}{\sqrt{n^n}} = \frac{1}{n^{n/2}} \leq \frac{1}{n^2}$$

sendo a série de termo geral $u_n = 1/n^2$ *convergente (é a série de Dirichlet com* $\alpha = 2 > 1$*). A série numérica* $\sum_{n\geq 1} 1/(2^n+n)$ *é convergente dado que é válida a desigualdade*

$$0 \leq \frac{1}{2^n+n} < \frac{1}{2^n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

e a série de termo geral $u_n = 1/2^n$ é convergente (é uma série geométrica de razão $1/2$, um valor entre -1 e 1).

Example 17 *Pelo mesmo critério se conclui que as séries*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n-1} \quad e \quad \sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}$$

são divergentes. De facto, a desigualdade

$$0 \leq \frac{1}{n} < \frac{1}{n-1}$$

é válida a partir da ordem $n = 2$ (inclusive) sendo a série de termo geral $v_n = 1/n$ uma série divergente (trata-se da série harmónica), e temos a desigualdade

$$0 \leq \frac{1}{\sqrt{n}} \leq \frac{1}{\sqrt{n}\,(\cos n)^2} = \frac{1}{\sqrt{n}\cos^2 n}, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

dado que $-1 \leq \cos n \leq 1$ implica $0 < (\cos n)^2 \leq 1$ (note que $n \neq k\pi/2$), sendo a série de termo geral $v_n = 1/\sqrt{n}$ também uma série divergente (é a série de Dirichlet com $\alpha = 1/2 \leq 1$).

Example 18 *Atendendo a que a série numérica $\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n\,(n+1)}\right)$ é convergente e igual à série $\sum_{n\geq 2} \left(\frac{1}{(n-1)\,n}\right)$, podemos confirmar, por aplicação do critério da comparação - formulação 1, que a série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$ também é convergente pois*

$$\frac{1}{n^2} = \frac{1}{n \cdot n} \leq \frac{1}{(n-1)\cdot n}$$

a partir da ordem $n = 2$ (inclusive).

Definition 19 *Dada uma série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$, a série de termos não-negativos $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ diz-se a sua **série modular**.*

Definition 20 *Uma série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diz-se* ***absolutamente convergente*** *quando a série modular* $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *é convergente.*

A relação entre estes dois tipos de convergência é consequência do critério da comparação - formulação 1.

Proposition 21 *Uma série* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente sempre que a sua série modular* $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *o for,*

$$\boxed{\sum_{n\geq 1} |u_n| \text{ série convergente} \implies \sum_{n\geq 1} u_n \text{ série convergente}}.$$

Além disso, tem-se

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| \geq \left|\sum_{n\geq 1} u_n\right|. \tag{1}$$

Proof. *Dadas as desigualdades*

$$0 \leq u_n + |u_n| \leq |u_n| + |u_n| = 2|u_n|$$

e o facto de ser convergente a série $\sum_{n\geq 1} |u_n|$*, concluímos pelo critério da comparação - formulação 1 que a série numérica* $\sum_{n\geq 1} (u_n + |u_n|)$ *também é convergente. Sendo*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} (u_n + |u_n|) - \sum_{n\geq 1} |u_n|,$$

a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente. A desigualdade (1) resulta da desigualdade triangular (*$|a+b| \leq |a| + |b|$*, para todo* $a, b \in \mathbb{R}$*)* ■

Dada a definição de série absolutamente convergente, temos então que toda a série absolutamente convergente é convergente.

Definition 22 *Uma série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *diz-se* ***simplesmente convergente****.quando é convergente mas não absolutamente convergente, ou seja, a série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *é convergente mas a sua série modular* $\sum_{n\geq 1} |u_n|$ *é divergente.*

Dada a proposição anterior, concluímos que se uma série numérica é absolutamente convergente então também é simplesmente convergente,

$$\boxed{\text{Convergência absoluta} \implies \text{Convergência simples}}.$$

Em consequência deste resultado (por contra-recíproco), se $\sum_{n\geq 1} u_n$ não é simplesmente convergente então também não é absolutamente convergente,

$$\boxed{\text{Não-convergência simples} \implies \text{Não-convergência absoluta}}.$$

De salientar que para que uma série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ seja absolutamente convergente, **NÃO BASTA** (não é suficiente) que seja simplesmente convergente (é necessário que também convirja a sua série modular $\sum_{n\geq 1} |u_n|$),

$$\boxed{\text{Convergência simples} \not\Rightarrow \text{Convergência absoluta}},$$

no entanto, tal é necessário.

1.1.1 Critérios de convergência para séries de termos não-negativos

Uma série numérica $\sum_{n\geq 1} u_n$ diz-se de termos não-negativos se $u_n \geq 0$ para todo o n.

Proposition 23 ***(Critério da comparação - formulação 2)*** *Sejam $\sum_{n\geq 1} u_n$ e $\sum_{n\geq 1} v_n$ duas séries numéricas tais que $u_n \geq 0$ e $v_n > 0$ para todo o n. Se existe o limite*

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n}$$

e tem valor finito não-nulo (portanto $L \neq 0$ e $L \neq +\infty$, ou ainda, $0 < L < +\infty$) então as duas séries têm a mesma natureza.

É frequente o uso de uma série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$ como série $\sum_{n\geq 1} v_n$. O valor conveniente para $\alpha \in \mathbb{Q}$ é escolhido com base no termo geral u_n da série $\sum_{n\geq 1} u_n$ de que se quer identificar a natureza. Também as séries geométricas são usadas com frequência para comparação.

Example 24 *Pelo critério da comparação - formulação 2, as séries numéricas* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *de termo geral*

$$u_n = \frac{2}{n}, \quad u_n = \frac{n-3}{n^2} \quad e \quad u_n = \operatorname{sen}\frac{1}{n}$$

são divergentes. Consideramos, para todas estas séries, a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *com termo geral* $v_n = 1/n$ *que é divergente (é a série harmónica) e permite obter os seguintes limites finitos não-nulos:*

$$L = \lim_n \frac{\frac{2}{n}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{2n}{n} = \lim_n 2 = 2,$$

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{n-3}{n^2}}{\frac{1}{n}} = \lim_n \frac{(n-3)\,n}{n^2} = \lim_n \frac{n-3}{n} = \lim_n \left(1 - \frac{3}{n}\right) = 1$$

(note que $\alpha = 1 = 2 - 1 =$ *grau* $(n^2) -$ *grau* $(n-3)$*) e*

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\operatorname{sen}\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}} = 1.$$

Example 25 *Pelo mesmo critério se conclui que são convergentes as séries numéricas* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *de termo geral*

$$u_n = \frac{n^2+3}{2n^4+n^2}, \quad u_n = n\sin\frac{1}{n^3+1} \quad e \quad u_n = \frac{n}{n^2+1}\ln\frac{n+2}{n+5}.$$

O estudo da natureza de todas estas séries exige a comparação com a série de Dirichlet $\sum_{n\geq 1} 1/n^2$ *que é convergente* ($\alpha = 2 > 1$)*. De facto, é finito não-nulo o limite*

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\frac{n^2+3}{2n^4+n^2}}{\frac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{(n^2+3)\,n^2}{2n^4+n^2} = \lim_n \frac{(n^2+3)\,n^2}{n^2\,(2n^2+1)} \\ &= \lim_n \frac{n^2+3}{2n^2+1} = \lim_n \frac{n^2}{2n^2} = \lim_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

(note que $\alpha = 2 = 4-2 =$ *grau* $(2n^4+n^2+2)-$ *grau* (n^2+3n-1)*).*

A série $\sum_{n\geq 1} n \sin 1/(n^3+1)$ *é convergente dado que é finito não-nulo o limite*

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{n \sin \dfrac{1}{n^3+1}}{\dfrac{n}{n^3+1}} = \lim_n \frac{n \sin \dfrac{1}{n^3+1}}{n \dfrac{1}{n^3+1}} = \lim_n \frac{\sin \dfrac{1}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^3+1}} = 1$$

sendo convergente a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *com termo geral* $v_n = n/(n^3+1)$*. Na verdade, aplicando de novo o critério da comparação - formulação 2, a série* $\sum_{n\geq 1} n/(n^3+1)$ *é convergente por ser finito não-nulo o limite*

$$L = \lim_n \frac{v_n}{w_n} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^3+1}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{n^3+1} = \lim_n \frac{n^3}{n^3} = \lim_n 1 = 1.$$

e ser convergente a série $\sum_{n\geq 1} w_n$ *com termo geral* $w_n = 1/n^2$*.*

A série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+1} \ln \frac{n+2}{n+5}$$

é convergente dado que é finito não-nulo o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^2+1} \ln \dfrac{n+2}{n+5}}{\dfrac{n}{(n^2+1)(n+5)}} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{n^2+1} \ln \left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{n}{n^2+1} \dfrac{1}{n+5}} \\ &= \lim_n \frac{\ln \left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{1}{n+5}} = \lim_n \frac{-3 \ln \left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{-3}{n+5}} \\ &= -3 \lim_n \frac{\ln \left(1 - \dfrac{3}{n+5}\right)}{\dfrac{-3}{n+5}} = -3 \cdot 1 = -3 \end{aligned}$$

sendo convergente a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ *com termo geral* $v_n = n/\left(n^2+1\right)(n+5)$. *Na verdade, aplicando de novo o critério da comparação - formulação 2, a série* $\sum_{n\geq 1} n/\left(n^2+1\right)(n+5)$ *é convergente por ser finito não-nulo o limite*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \frac{v_n}{w_n} = \lim_n \frac{\dfrac{n}{\left(n^2+1\right)(n+5)}}{\dfrac{1}{n^2}} = \lim_n \frac{n^3}{\left(n^2+1\right)(n+5)} \\
&= \lim_n \frac{n^3}{n^3+5n^2+n+5} = \lim_n \frac{n^3}{n^3} = \lim_n 1 = 1
\end{aligned}$$

e ser convergente a série $\sum_{n\geq 1} w_n$ *com termo geral* $w_n = 1/n^2$.

Example 26 *Ainda pelo critério da comparação - formulação 2 se conclui que são convergentes as séries numéricas* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *de termo geral*

$$u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1+\sqrt{n}}{n^2-n} \quad e \quad u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \tan\frac{1}{n}.$$

De facto, é finito não-nulo o limite

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\dfrac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}}{\dfrac{1}{n^{3/2}}} = \lim_n \frac{\dfrac{1+\sqrt{n}}{n^2-n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^3}}} = \lim_n \frac{\left(1+\sqrt{n}\right)\sqrt{n^3}}{n^2-n} \\
&= \lim_n \frac{\sqrt{n^3}+\sqrt{n^4}}{n^2-n} = \lim_n \frac{n^{3/2}+n^2}{n^2-n} = \lim_n \frac{n^2}{n^2} = \lim_n 1 = 1
\end{aligned}$$

(note que $\alpha = 3/2 = 2-1/2$*), sendo convergente a série* $\sum_{n\geq 1} v_n$ *com termo geral* $v_n = 1/n^{3/2}$ *(é a série de Dirichlet com* $\alpha = 3/2 > 1$*). A série*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\sqrt{n}} \tan\frac{1}{n}$$

é convergente dado que é finito não-nulo o limite

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \tan \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n^{5/2}}} = \lim_n \frac{\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \tan \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{\sqrt{n^4 n}}} \\ &= \lim_n \frac{\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \tan \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n\sqrt{n}} \dfrac{1}{n}} = \lim_n \frac{\tan \dfrac{1}{n}}{\dfrac{1}{n}} = 1 \end{aligned}$$

e é convergente a série $\sum\limits_{n\geq 1} v_n$ *com termo geral* $v_n = 1/n^{5/2}$ *(é a série de Dirichlet com* $\alpha = 5/2 > 1$*).*

Proposition 27 ***(Critério da raíz)*** *Dada uma série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *tal que* $u_n \geq 0$ *para todo o* n*,*

i. *se existe* $K < 1$ *tal que, a partir de certa ordem* n*, se tem*

$$\sqrt[n]{u_n} \leq K$$

então a série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *é convergente;*

ii. *se, para infinitos valores de* n*, se tem*

$$\sqrt[n]{u_n} \geq 1$$

então a série numérica $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *é divergente.*

Proposition 28 ***(Critério da raíz de Cauchy)*** *Dada uma série numérica* $\sum\limits_{n\geq 1} u_n$ *tal que* $u_n \geq 0$ *para todo o* n*, suponha que o limite*

$$L = \lim_n \sqrt[n]{u_n}$$

é finito ou $+\infty$*. Então a série é convergente se* $L < 1$ *e é divergente se* $L > 1$ *ou* $L = 1^+$ *(*$L = 1^+$ *significa* $L = 1$ *e* $\sqrt[n]{u_n} > 1$*). Quando* $L = 1^-$ *(que significa* $L = 1$ *e* $\sqrt[n]{u_n} < 1$*) ou* $L = 1^\pm$ *(que significa* $L = 1$ *mas* $\sqrt[n]{u_n} > 1$ *para alguns valores de* n *e* $\sqrt[n]{u_n} < 1$ *para outros valores de* n *intercalados com os anteriores) nada se pode concluir sobre a natureza da série.*

Example 29 *Pelo critério da raíz de Cauchy a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{4n+1}{3n+3}\right)^{3n}$$

é divergente dado o limite superior a 1

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{4n+1}{3n+3}\right)^{3n}} = \lim_n \sqrt[n]{\left[\left(\frac{4n+1}{3n+3}\right)^{3}\right]^{n}} \\
&= \lim_n \left(\frac{4n+1}{3n+3}\right)^{3} = \lim_n \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3n+3}\right)^{3} = \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{3\,(+\infty)+3}\right)^{3} \\
&= \left(\frac{4}{3} - \frac{3}{+\infty}\right)^{3} = \left(\frac{4}{3} - 0\right)^{3} = \frac{64}{27} > 1.
\end{aligned}$$

Example 30 *Pelo critério da raíz de Cauchy a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}$$

é convergente dado o limite inferior a 1

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2}} = \lim_n \sqrt[n]{\left[\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n}\right]^{n}} \\
&= \lim_n \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n} = \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1-1} \\
&= \lim_n \left[\left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1}\right] \\
&= e^{-1} \cdot \lim_n \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot (1-0)^{-1} = \frac{1}{e} \cdot 1 = \frac{1}{e} < 1.
\end{aligned}$$

Example 31 *Pelo critério da raíz de Cauchy a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^{n/2}}$$

é convergente dado o limite inferior a 1

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n/2}}} = \lim_n \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{n^{n/2}}} = \lim_n \frac{1}{\left(n^{n/2}\right)^{1/n}} \\ &= \lim_n \frac{1}{n^{\frac{n}{2}\cdot\frac{1}{n}}} = \lim_n \frac{1}{n^{\frac{1}{2}}} = \lim_n \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 < 1 \end{aligned}$$

(note que foi provado atrás a convergência desta série numérica pelo critério da comparação - formulação 1).

Example 32 *O critério da raíz de Cauchy aplicado à série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^n$$

é inconclusivo. De facto, embora seja 1 *o valor do limite*

$$L = \lim_n \sqrt[n]{u_n} = \lim_n \sqrt[n]{\left(\frac{n+2}{n+5}\right)^n} = \lim_n \frac{n+2}{n+5} = \lim_n \frac{n}{n} = \lim_n 1 = 1,$$

a desigualdade

$$\frac{n+2}{n+5} < 1$$

mostra que $L = 1^-$*. Para identificar a natureza desta série numérica há que aplicar o critério geral de convergência pois o termo geral da série não tende para* 0*,*

$$\begin{aligned} \lim_n u_n &= \lim_n \left(\frac{n+2}{n+5}\right)^n = \lim_n \left(1 - \frac{3}{n+5}\right)^n = \lim_n \left(1 - \frac{3}{n+5}\right)^{n+5-5} \\ &= \lim_n \left[\left(1 - \frac{3}{n+5}\right)^{n+5} \cdot \left(1 - \frac{3}{n+5}\right)^{-5}\right] = e^{-3} \cdot \left(1 - \frac{3}{+\infty}\right)^{-5} \\ &= e^{-3} \cdot 1 = \frac{1}{e^3}. \end{aligned}$$

Concluímos então que a série numérica é divergente.

Proposition 33 ***(Critério da razão)*** *Dada uma série numérica* $\sum_{n\geq 1} u_n$ *tal que* $u_n > 0$*, para todo o* n*,*

i. *se existe* $K < 1$ *tal que, a partir de certa ordem* n*, se tem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq K$$

então a série numérica $\sum_{n \geq 1} u_n$ *é convergente;*

ii. *se, a partir de certa ordem* n*, se tem*

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$$

então a série numérica $\sum_{n \geq 1} u_n$ *é divergente.*

Proposition 34 ***(Critério da razão de D' Alemberg)*** *Dada uma série numérica* $\sum_{n \geq 1} u_n$ *tal que* $u_n > 0$*, para todo o* n*, suponha que o limite*

$$L = \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

é finito ou $+\infty$*. Então série é convergente se* $L < 1$ *e é divergente se* $L > 1$ *ou* $L = 1^+$ *(*$L = 1^+$ *significa* $L = 1$ *e* $u_{n+1}/u_n > 1$*). Quando* $L = 1^-$ *(que significa* $L = 1$ *e* $u_{n+1}/u_n < 1$*) ou* $L = 1^{\pm}$ *(que significa* $L = 1$ *mas* $u_{n+1}/u_n > 1$ *para alguns valores de* n *e* $u_{n+1}/u_n < 1$ *para outros valores de* n *intercalados com os anteriores) nada se pode concluir sobre a natureza da série.*

Example 35 *Pelo critério da razão de D' Alemberg a série numérica*

$$\sum_{n \geq 1} u_n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!}$$

é convergente dado o limite inferior a 1

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_n \frac{n!}{(n+1)\, n!} \\ &= \lim_n \frac{1}{(n+1)} = 0 < 1. \end{aligned}$$

Example 36 *Pelo critério da razão de D' Alemberg a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{(n!)^2}{2^{n^2}}$$

é convergente dado o limite inferior a 1

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{[(n+1)!]^2}{2^{(n+1)^2}}}{\frac{(n!)^2}{2^{n^2}}} = \lim_n \frac{[(n+1)!]^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{(n+1)^2} \cdot (n!)^2} \\
&= \lim_n \frac{[(n+1) \cdot n!]^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2+2n+1} \cdot (n!)^2} = \lim_n \frac{(n+1)^2 \cdot (n!)^2 \cdot 2^{n^2}}{2^{n^2} \cdot 2^{2n+1} \cdot (n!)^2} \\
&= \lim_n \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \lim_n \frac{n^2+2n+1}{(2^2)^n \cdot 2} = \lim_n \frac{n^2+2n+1}{4^n \cdot 2} \\
&= \lim_n \left(\frac{n^2+2n+1}{4^n} \cdot \frac{1}{2} \right) = \lim_n \left(\frac{n^2}{4^n} \cdot \frac{1}{2} \right) = 0 \cdot \frac{1}{2} = 0 < 1
\end{aligned}$$

(note que $\lim_{x\to+\infty} (x^p/a^x) = 0$ *sempre que* $a > 1$ *e* $p \in \mathbb{R}$*).*

Example 37 *Pelo critério da razão de D' Alemberg a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{n+1}{2n+3}$$

é divergente porque, embora tenha valor 1 *o limite*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\frac{(n+1)+1}{2(n+1)+3}}{\frac{n+1}{2n+3}} = \lim_n \frac{\frac{n+2}{2n+5}}{\frac{n+1}{2n+3}} = \lim_n \frac{(n+2)(2n+3)}{(2n+5)(n+1)} \\
&= \lim_n \frac{2n^2+7n+6}{2n^2+7n+5} = \lim_n \frac{2n^2}{2n^2} = \lim_n 1 = 1,
\end{aligned}$$

atendendo à desigualdade

$$\frac{2n^2+7n+6}{2n^2+7n+5} > 1$$

temos $L = 1^+$. Note que a divergência desta série também se conclui pelo critério geral de convergência pois o termo geral não tende para 0 *(temos* $\lim_n (n+1) / (2n+3) = \lim_n n/2n = \lim_n 1/2 = 1/2 \neq 0$*).*

Example 38 *O critério da razão de D' Alemberg aplicado à série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n(n+3)}$$

é inconclusivo. De facto, temos

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\dfrac{2(n+1)+1}{(n+1)[(n+1)+3]}}{\dfrac{2n+1}{n(n+3)}} = \lim_n \frac{\dfrac{2n+3}{(n+1)(n+4)}}{\dfrac{2n+1}{n(n+3)}} \\ &= \lim_n \frac{(2n+3)\, n(n+3)}{(n+1)(n+4)(2n+1)} = \lim_n \frac{(2n+3)(n^2+3n)}{(n^2+5n+4)(2n+1)} \\ &= \lim_n \frac{2n^3+9n^2+9n}{2n^3+11n^2+13n+4} = \lim_n \frac{2n^3}{2n^3} = \lim_n 1 = 1 \end{aligned}$$

e, atendendo à desigualdade

$$\frac{2n^3+9n^2+9n}{2n^3+11n^2+13n+4} < 1,$$

temos $L = 1^-$. O estudo da natureza desta série numérica requer o critério da comparação - formulação 2. De facto, considerando a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ com termo geral $v_n = 1/n$, temos o limite finito não-nulo

$$L = \lim_n \frac{u_n}{v_n} = \lim_n \frac{\dfrac{2n+1}{n(n+3)}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_n \frac{(2n+1)\, n}{n(n+3)} = \lim_n \frac{2n+1}{n+3} = \lim_n \frac{2n}{n} = 2,$$

o que permite concluir que, sendo a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ divergente, também a série $\sum_{n\geq 1} u_n$ o é.

Example 39 *Pelo critério da razão de D' Alemberg a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}$$

é convergente dado o limite inferior a 1

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_n \frac{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)\cdot(2(n+1)+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)\cdot(3(n+1)-1)}}{\dfrac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}} \\ & \lim_n \frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)\cdot(2n+3)\cdot 2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\dots\cdot(3n-1)\cdot(3n+2)\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\dots\cdot(2n+1)} \\ &= \lim_n \frac{2n+3}{3n+2} = \lim_n \frac{2n}{3n} = \lim_n \frac{2}{3} = \frac{2}{3} < 1. \end{aligned}$$

1.1.2 Critérios de convergência para séries de termos negativos e séries alternadas

Quando uma série $\sum_{n\geq 1} u_n$ é de termos negativos consideramos

$$\sum_{n\geq 1} u_n = -\sum_{n\geq 1} (-u_n).$$

A série $\sum_{n\geq 1} u_n$ tem a mesma natureza que a série de termos positivos $\sum_{n\geq 1} (-u_n)$ e, caso seja convergente, tem soma de valor simétrico.

Definition 40 *Uma série diz-se* ***alternada*** *se os seus termos alternam de sinal, ou seja, se o seu termo geral u_n é produto do factor $(-1)^n$ por um factor a_n não-nulo de sinal constante,*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \cdot a_n\right].$$

Example 41 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} (-1)^n = -1+1-1+1-1+\dots$$

é uma série alternada. Esta série é divergente dado que o seu termo geral $u_n = (-1)^n$ não tende para 0 (na verdade, $u_n = (-1)^n$ não tem limite pois a subsucessão dos termos de ordem par $u_{2k} = (-1)^{2k} = 1$ tende para 1 e a subsucessão dos termos de ordem ímpar $u_{2k-1} = (-1)^{2k-1} = -1$ tende para -1). Note, no entanto, que a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n + (-1)^{n+1}\right] = (-1+1)+(-1+1)+\ldots = 0+0+\cdots = \sum_{n\geq 1} 0,$$

que não é uma série alternada, é manifestamente convergente e com soma $S = 0$ (note que a única série numérica de termo geral constante que é convergente é a série de termo geral nulo).

Proposition 42 ***(Critério de Leibnitz)*** *Se $(a_n)_{n\in N}$ é uma sucessão decrescente de termos positivos e tem limite 0, então a série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \cdot a_n\right]$$

é convergente.

Remark 43 *Note que quando se prova que uma série numérica alternada é convergente não podemos concluir que ela é absolutamente convergente. É necessário identificar a natureza da sua série modular. Se esta for convergente então a série alternada é absolutamente convergente. No entanto, se a série modular for divergente então a série alternada é apenas simplesmente convergente.*

Example 44 *Pelo critério de Leibnitz a série alternada*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \frac{1}{n}\right]$$

é convergente (note que $a_n = 1/n > 0$, a_n é decrescente e tende para 0). No enquanto, dado que a série modular

$$\sum_{n\geq 1} \left|(-1)^n \frac{1}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \left|\frac{(-1)^n}{n}\right| = \sum_{n\geq 1} \frac{|(-1)^n|}{|n|} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

é divergente (trata-se da série harmónica), a série alternada é simplesmente convergente.

Remark 45 *O exemplo anteriores mostra que existem séries convergentes (simplesmente convergentes) que não são absolutamente convergentes, ou seja,*

$$\boxed{\text{Convergência simples} \;\not\Rightarrow\; \text{Convergência absoluta}}.$$

Remark 46 *Por vezes é vantajoso começar por identificar a natureza da série modular. Caso esta seja convergente fica provada a convergência absoluta da série alternada. No entanto, se a série modular for divergente apenas ficamos a saber que a série alternada não é absolutamente convergente (ela pode ser divergente ou simplesmente convergente).*

Example 47 *Pelo critério de Leibnitz a série alternada*

$$\sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n+1}\frac{3}{n!}\right]$$

é convergente (note que $a_n = 3/n! > 0$ é decrescente e tende para 0). Dado que a série modular

$$\sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\frac{3}{n!}\right| = \sum_{n\geq 1}\left|\frac{3\cdot(-1)^{n+1}}{n!}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{3\cdot|(-1)^{n+1}|}{|n!|} = \sum_{n\geq 1}\frac{3}{n!}$$

é convergente, a série alternada é absolutamente convergente. Neste caso, teria sido vantajoso começar pelo estudo da série modular.

Example 48 *A série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1}u_n = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}\right]$$

é absolutamente convergente dado que a sua série modular

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1}|u_n| &= \sum_{n\geq 1}\left|(-1)^n\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}\right| \\ &= \sum_{n\geq 1}\left(|(-1)^n|\cdot\left|\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}\right|\right) \\ &= \sum_{n\geq 1}\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n+1)}{2\cdot 5\cdot 8\cdot\cdots\cdot(3n-1)}\end{aligned}$$

é convergente (provado atrás). Neste caso, foi vantajoso começar pelo estudo da série modular.

Example 49 *A série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^n}}\right]$$

é absolutamente convergente dado que a sua série modular

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1}\left|(-1)^n \frac{1}{\sqrt{n^n}}\right| = \sum_{n\geq 1}\left(|(-1)^n| \cdot \left|\frac{1}{\sqrt{n^n}}\right|\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n^n}}$$

é convergente (provado atrás). Neste caso, foi vantajoso começar pelo estudo da série modular.

Example 50 *A série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n\sqrt{n}}\right]$$

é absolutamente convergente dado que a sua série modular

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n-1} \sin\frac{1}{n\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1}\left(\left|(-1)^{n-1}\right| \cdot \left|\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}\right|\right) = \sum_{n\geq 1}\sin\frac{1}{n\sqrt{n}}$$

é convergente (provado atrás). Neste caso, foi vantajoso começar pelo estudo da série modular.

Example 51 *A série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}} = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^{n+1}\frac{1}{\sqrt{n}}\right]$$

tem como série modular

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1}\left|\frac{(-1)^{n+1}}{\sqrt{n}}\right| = \sum_{n\geq 1}\frac{|(-1)^{n+1}|}{|\sqrt{n}|} = \sum_{n\geq 1}\frac{1}{\sqrt{n}}$$

que é divergente (é a série de Dirichlet com $\alpha = 1/2 < 1$). Neste caso, o estudo da série modular apenas permite concluir que a série alternada não é absolutamente convergente. Para decidir se é simplesmente convergente ou divergente, aplicamos o critério de Leibnitz. A sucessão $a_n = 1/\sqrt{n}$ tem todos os termos positivos, é decrescente e tende para 0. como tal, concluímos que a série alternada é simplesmente convergente. Neste caso, começar pelo estudo da série modular não evita o estudo da série alternada original.

Example 52 *A série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \frac{2n+1}{n(n+3)} \right]$$

tem como série modular

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \left| (-1)^n \frac{2n+1}{n(n+3)} \right| = \sum_{n\geq 1} \left(|(-1)^n| \cdot \left| \frac{2n+1}{n(n+3)} \right| \right) = \sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n(n+3)}$$

que é divergente (provado atrás). Neste caso, o estudo da série modular apenas permite concluir que a série alternada não é absolutamente convergente. Para decidir se é simplesmente convergente ou divergente, aplicamos o critério de Leibnitz. A sucessão

$$a_n = \frac{2n+1}{n(n+3)} = \frac{2n+1}{n^2+3n}$$

tem todos os termos positivos, é decrescente pois

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \frac{2(n+1)+1}{(n+1)^2 + 3(n+1)} - \frac{2n+1}{n^2+3n} \\ &= \frac{2n+3}{n^2+2n+1+3n+3} - \frac{2n+1}{n^2+3n} \\ &= \frac{2n+3}{n^2+5n+4} - \frac{2n+1}{n^2+3n} \\ &= \frac{(2n+3)(n^2+3n) - (2n+1)(n^2+5n+4)}{(n^2+5n+4)(n^2+3n)} \\ &= \frac{-2n^2-4n-4}{(n^2+5n+4)(n^2+3n)} < 0, \end{aligned}$$

e tende para 0,

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{2n+1}{n^2+3n} = \lim_n \frac{2n}{n^2} = \lim_n \frac{2}{n} = 0.$$

Concluímos então que a série alternada é simplesmente convergente. Neste caso, começar pelo estudo da série modular não evita o estudo da série alternada original.

Remark 53 *Quando, no estudo da natureza de uma série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \cdot a_n\right],$$

a aplicação do critério de Leibnitz é inviabilizada por ser não-nulo o limite de a_n, devemos tentar a aplicação do critério geral de convergência, pois é provável que não exista o limite

$$\lim_n \left[(-1)^n \cdot a_n\right]$$

ou que este limite também seja não-nulo. Se tal suceder a série alternada é divergente.

Example 54 *O critério de Leibnitz aplicado à série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}\right]$$

é inconclusivo (note que $a_n = n/(n+1)$ não tende para 0). No entanto, pelo critério geral de convergência, concluímos que a série é divergente. Na verdade, não existe o limite

$$\lim_n \left[(-1)^{n+1} \frac{n}{n+1}\right]$$

dado que da sucessão de termo geral $u_n = (-1)^{n+1}\dfrac{n}{n+1}$ se obtêm duas subsucessões com limites diferentes: fazendo $n = 2k$ (ordem par) temos a subsucessão

$$u_{2k} = (-1)^{2k+1} \frac{2k}{(2k)+1} = (-1)\frac{2k}{2k+1} = \frac{-2k}{2k+1} = -1 + \frac{1}{2k+1},$$

que tem -1 como limite e, fazendo $n = 2k-1$ (ordem ímpar), temos a subsucessão

$$(-1)^{2k-1+1} \frac{2k-1}{(2k-1)+1} = (-1)^{2k} \frac{2k-1}{2k} = \frac{2k-1}{2k} = 1 - \frac{1}{2k}$$

que tende para 1. Se o termo geral não tende para 0 então a série é divergente.

Note que o estudo da natureza da série modular

$$\sum_{n\geq 1}|u_n| = \sum_{n\geq 1}\left|(-1)^{n+1}\frac{n}{n+1}\right| = \sum_{n\geq 1}\left(\left|(-1)^{n+1}\right|\cdot\left|\frac{n}{n+1}\right|\right) = \sum_{n\geq 1}\frac{n}{n+1}$$

apenas permite concluir concluir que a série alternada não é absolutamente convergente, dado que a série modular é divergente (o seu termo geral não tende para 0*, tende para* 1*).*

Example 55 *O critério de Leibnitz aplicado à série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1}u_n = \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^n\frac{\ln n}{n}\right]$$

é inconclusivo. Na verdade, embora se tenha

$$a_n = \frac{\ln n}{n} > 0$$

e

$$\lim_n a_n = \lim_n \frac{\ln n}{n} = 0$$

(note que $\lim_{x\to+\infty}(\ln x)/x^p = 0$ *qualquer que seja* $p \in \mathbb{R}$*), não é possível garantir que a sucessão de termo geral* a_n *seja decrescente. De facto, a diferença*

$$\begin{aligned}
a_{n+1} - a_n &= \frac{\ln(n+1)}{n+1} - \frac{\ln n}{n} = \frac{n\ln(n+1) - (n+1)\ln n}{(n+1)\,n} \\
&= \frac{n\ln(n+1) - n\ln n - \ln n}{(n+1)\,n} = \frac{n\left[\ln(n+1) - \ln n\right] - \ln n}{(n+1)\,n} \\
&= \frac{n\ln\frac{n+1}{n} - \ln n}{(n+1)\,n} = \frac{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)^n - \ln n}{(n+1)\,n} = \frac{\ln\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n}}{(n+1)\,n}
\end{aligned}$$

não é negativa para todo o n*. O numerador é negativo se*

$$0 < \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{n} < 1 \Leftrightarrow \left(1+\frac{1}{n}\right)^n < n$$

o que não acontece para $n = 1$ e $n = 2$ (para $n = 1$ temos $2 > 1$, para $n = 2$ temos $(1 + 1/2)^2 = 9/4 > 2$).

Consideremos a série modular

$$\sum_{n\geq 1} |u_n| = \sum_{n\geq 1} \left| (-1)^n \frac{\ln n}{n} \right| = \sum_{n\geq 1} \left(|(-1)^n| \cdot \left| \frac{\ln n}{n} \right| \right) = \sum_{n\geq 1} \frac{\ln n}{n}.$$

Aplicando o critério da comparação - formulação 1, temos

$$0 \leq \frac{1}{n} < \frac{\ln n}{n}$$

sempre que $n > e$ (para que $\ln n > 1$) o que permite concluir que a série modular é divergente visto que o é a série $\sum_{n\geq 1} v_n$ de termo geral $v_n = 1/n$. No entanto, a série alternada pode ser divergente ou simplesmente convergente.

Example 56 $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \dfrac{n}{n\sqrt{n} - 1}$ *(Solução: simplesmente convergente)*

Example 57 *Não podemos aplicar à série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{\sin n}{2^n}$$

os critérios da comparação porque não é uma série de termos não-negativos (note que também não é uma série alternada). No entanto, é válida a desigualdade

$$0 \leq \left| \frac{\sin n}{2^n} \right| = \frac{|\sin n|}{2^n} \leq \frac{1}{2^n}$$

o que, pelo critério referido, permite concluir que a série

$$\sum_{n\geq 1} \left| \frac{\sin n}{2^n} \right|$$

é convergente. Dado que esta é a série modular da série $\sum_{n\geq 1} (\sin n) / 2^n$, concluímos a série $\sum_{n\geq 1} (\sin n) / 2^n$ é absolutamente convergente. Neste caso, revelou-se vantajoso o estudo da série modular.

1.2 Séries funcionais: caso particular de séries de potências

Quando o termo geral de uma série não depende só de n mas também de uma variável x, a série diz-se uma **série funcional** (ou **série de funções**).

Example 58 *A série*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{\sin(nx)}{n(n+1)} = \frac{\sin x}{2} + \frac{\sin(2x)}{6} + \frac{\sin(3x)}{12} + \frac{\sin(4x)}{20} + \cdots$$

é uma série funcional. Dado que, para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$$\left|\frac{\sin(nx)}{n(n+1)}\right| = \frac{|\sin(nx)|}{|n(n+1)|} = \frac{|\sin(nx)|}{n(n+1)} \leq \frac{1}{n(n+1)} < \frac{1}{n^2}$$

e a série numérica de termo geral $1/n^2$ é convergente, podemos afirmar que a série funcional é absolutamente convergente qualquer que seja o valor de $x \in \mathbb{R}$.

Considere o seguinte caso de série funcional, que é particularmente importante por constituir uma generalização da noção de polinómio.

Definition 59 *Chama-se* ***série de potências*** *de x a toda a série da forma*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \left(v_n \cdot x^{n-1}\right) = v_1 + v_2 \cdot x + v_3 \cdot x^2 + v_4 \cdot x^3 + \cdots .$$

Para cada valor de x fixo, a série de potências $\sum_{n\geq 1} (a_n \cdot x^{n-1})$ dá lugar a uma série numérica. Em geral, existem valores de x que conduzem a séries numéricas convergentes (absolutamente ou simplesmente) e valores de x que conduzem a séries numéricas divergentes.

Example 60 *Consideremos a série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots$$

em que $v_n = 1$ para todo o n. Para $x = 2$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(2) = \sum_{n\geq 1} 2^{n-1} = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + \cdots$$

que é divergente (o termo geral não tende para 0*). Para* $x = 1/2$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \cdots$$

que é absolutamente convergente (é uma série geométrica de razão entre -1 *e* 1*, tal como a sua série modular).*

Definition 61 *O conjunto de valores de* x *para os quais a série de potências* $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}(v_n \cdot x^{n-1})$ *é convergente diz-se o* ***domínio de convergência pontual*** *(ou apenas* ***domínio de convergência****) da série. Quando o domínio de convergência é um intervalo, a metade do comprimento desse intervalo diz-se o* ***raio de convergência da série.***

Proposition 62 *A cada série de potências de* x*,* $\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1}(v_n \cdot x^{n-1})$*, está associado um "número"* $R \geq 0$ *ou* $R = +\infty$ *tal que se* $x \in \left]-R, R\right[$ *(ou seja,* $|x| < R$*) então a série numérica correspondente é absolutamente convergente e se* $x \in \left]-\infty, -R\right[\cup \left]R, +\infty\right[$ *(ou seja,* $|x| > R$*) a série numérica correspondente é divergente. O valor de* R *é dado por*

$$\boxed{R = \frac{1}{L}}$$

em que L *é o valor do limite superior*

$$L = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|}.$$

Quando existe, o limite $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$ *tem o mesmo valor que* $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$*. Neste caso, também*

$$L = \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right|.$$

Este resultado não permite concluir a natureza da série de potências para $x = R$ e $x = -R$ (ou seja, $|x| = R$). Para estes valores de x é necessário um estudo particular, ou seja, substituir na série de potências a variável x por R e por $-R$ e estudar as séries numéricas

$$\sum_{n\geq 1} u_n(R) = \sum_{n\geq 1}\left(v_n \cdot R^{n-1}\right) \quad \text{e} \quad \sum_{n\geq 1} u_n(-R) = \sum_{n\geq 1}\left[v_n \cdot (-R)^{n-1}\right].$$

Após o estudo destas séries numéricas, os valores R e $-R$ são ou não incluídos no domínio de convergência, mesmo que nestas séries a convergência seja apenas simples.

O estabelecido na Proposição 62 resulta do critério da raíz de Cauchy com o estudo do limite

$$\begin{aligned}
\overline{\lim_n} \sqrt[n]{|u_n(x)|} &= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n \cdot x^{n-1}|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n \cdot x^n \cdot x^{-1}|} \\
&= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n| \cdot |x^n| \cdot |x^{-1}|} = \overline{\lim_n} \left(\sqrt[n]{|v_n|} \cdot \sqrt[n]{|x^n|} \cdot \sqrt[n]{|x^{-1}|} \right) \\
&= \overline{\lim_n} \left(\sqrt[n]{|v_n|} \cdot \sqrt[n]{|x|^n} \cdot \sqrt[n]{|x|^{-1}} \right) = \overline{\lim_n} \left(\sqrt[n]{|v_n|} \cdot |x| \cdot |x|^{-1/n} \right) \\
&= |x| \cdot \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|} \cdot \overline{\lim_n} |x|^{-1/n} = |x| \cdot L \cdot |x|^0 = |x| \cdot L,
\end{aligned}$$

e do critério da razão de D' Alemberg com o estudo do limite

$$\begin{aligned}
\lim_n \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_n \left| \frac{v_{n+1} \cdot x^{n+1-1}}{v_n \cdot x^{n-1}} \right| = \lim_n \left| \frac{v_{n+1} \cdot x^n}{v_n \cdot x^{n-1}} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{v_{n+1} \cdot x^{n-1} \cdot x}{v_n \cdot x^{n-1}} \right| = \lim_n \left| \frac{v_{n+1} \cdot x}{v_n} \right| = \lim_n \frac{|v_{n+1}| \cdot |x|}{|v_n|} \\
&= |x| \cdot \lim_n \frac{|v_{n+1}|}{|v_n|} = |x| \cdot \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = |x| \cdot L
\end{aligned}$$

aplicados à série modular $\sum\limits_{n\geq 1} |u_n(x)| = \sum\limits_{n\geq 1} |v_n \cdot x^{n-1}|$. Em ambos os critérios, a condição de convergência $|x| \cdot L < 1$ é equivalente a $|x| < 1/L$.

O valor de R é o raio de convergência da série de potências. Dado o exposto, o raio de convergência da série de potências $\sum\limits_{n=1}^{\infty} (v_n \cdot x^{n-1})$ corresponde ao limite

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}}$$

e, caso exista, ao limite

$$R = \frac{1}{\lim_n \left| \dfrac{v_{n+1}}{v_n} \right|} = \frac{1}{\lim_n \dfrac{|v_{n+1}|}{|v_n|}} = \lim_n \frac{|v_n|}{|v_{n+1}|} = \lim_n \left| \frac{v_n}{v_{n+1}} \right|.$$

Example 63 *A série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots ,$$

em que $v_n = 1$, é absolutamente convergente sempre que x toma valores no intervalo aberto $]-1,1[$ porque

$$L = \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_n \left| \frac{1}{1} \right| = \lim_n 1 = 1$$

donde $R = 1/L = 1/1 = 1$. A condição de convergência absoluta $|x| < R$ é então

$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Para $x \in \left]-\infty,-1\right[\cup \left]1,+\infty\right[$ a série de potências é divergente. Para $x = 1$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(1) = \sum_{n\geq 1} 1^{n-1} = \sum_{n\geq 1} 1$$

que é divergente (o termo geral não tende para 0). Para $x = -1$ temos a série numérica alternada

$$\sum_{n\geq 1} u_n(-1) = \sum_{n\geq 1} (-1)^{n-1}$$

que também é divergente dado que o seu termo geral $(-1)^{n-1}$ não tem limite (a subsucessão dos termos de ordem par $(-1)^{2k-1} = -1$ tende para -1 e a subsucessão dos termos de ordem ímpar $(-1)^{2k-1-1} = (-1)^{2k} = 1$ tende para 1) logo não tende para 0. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D =]-1,1[$ e tem raio de convergência $R = 1$. Para cada $x \in]-1,1[$, a série de potências de x dá lugar a uma série geométrica convergente de razão x. É então possivel, neste caso, obter a função soma pontual da série de potências em $]-1,1[$ como sendo

$$f(x) = \frac{\text{primeiro termo}}{1 - \text{ razão}} = \frac{1}{1-x},$$

e escrever

$$\sum_{n\geq 1} x^{n-1} = 1 + x + x^2 + x^3 + x^4 + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

Example 64 *A série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{[3+(-1)^n]^{2n}} = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}} x^n \right],$$

em que $v_n = 1/[3+(-1)^n]^{2n}$*, é absolutamente convergente para* $x \in \left]-4,4\right[$ *porque*

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\left| \frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}} \right|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{[3+(-1)^n]^{2n}}} \\ &= \overline{\lim_n} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{[3+(-1)^n]^{2n}}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{\sqrt[n]{\left[[3+(-1)^n]^2\right]^n}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{[3+(-1)^n]^2} \\ &= \frac{1}{[3+(-1)]^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/(1/4) = 4$*. A condição de convergência absoluta* $|x| < R$ *é então*

$$|x| < 4 \Leftrightarrow -4 < x < 4.$$

Note que à sucessão $1/[3+(-1)^n]^2$ *corresponde o limite inferior*

$$\frac{1}{[3+1]^2} = \frac{1}{4^2} = \frac{1}{16}$$

correspondente aos termos de ordem par em que $(-1)^{2k} = 1$ *tende para* 1*, e o limite superior*

$$\frac{1}{[3+(-1)]^2} = \frac{1}{2^2} = \frac{1}{4}$$

correspondente aos termos de ordem ímpar em que $(-1)^{2k-1} = -1$ *tende para* -1*. Conforme a Proposição 62, há que escolher o limite superior. Para* $x \in \left]-\infty,-4\right[\cup \left]4,+\infty\right[$ *a série de potências é divergente. Para* $x = 4$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(4) = \sum_{n\geq 1} \frac{4^n}{[3+(-1)^n]^{2n}}$$

que é divergente atendendo a que o seu termo geral não tem limite. Na verdade, a subsucessão dos termos de ordem par

$$\frac{4^{2k}}{[3+(-1)^{2k}]^{4k}} = \frac{4^{2k}}{[3+1]^{4k}} = \frac{4^{2k}}{[3+1]^{4k}} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

tende para 0 *mas a subsucessão dos termos de ordem ímpar*

$$\frac{4^{2k-1}}{[3+(-1)^{2k-1}]^{4k-2}} = \frac{4^{2k-1}}{[3-1]^{4k-2}} = \frac{4^{2k-1}}{2^{4k-2}} = \frac{4^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} = \frac{(2^2)^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} = 1$$

tende para 1*. Para* $x = -4$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(-4) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-4)^n}{[3+(-1)^n]^{2n}} = \sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{4^n}{[3+(-1)^n]^{2n}}$$

que é divergente porque o seu termo geral não tem limite. Na verdade, a subsucessão dos termos de ordem par

$$(-1)^{2k} \frac{4^{2k}}{[3+(-1)^{2k}]^{4k}} = \frac{4^{2k}}{[3+1]^{4k}} = \frac{4^{2k}}{[3+1]^{4k}} = \left(\frac{1}{4}\right)^k$$

tende para 0 *mas a subsucessão dos termos de ordem ímpar*

$$\begin{aligned} (-1)^{2k-1} \frac{4^{2k-1}}{[3+(-1)^{2k-1}]^{4k-2}} &= -\frac{4^{2k-1}}{[3-1]^{4k-2}} = -\frac{4^{2k-1}}{2^{4k-2}} = -\frac{4^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} \\ &= -\frac{(2^2)^{2k-1}}{2^{2(2k-1)}} = -1 \end{aligned}$$

tende para -1*. Assim, o domínio de convergência da série de potências é* $D =]-4, 4[$*.*

Example 65 *A série de potências de* x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n x^n}{n\cdot 2^n} = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n} x^n\right],$$

em que $v_n = (-1)^n / (n\cdot 2^n)$*, é absolutamente convergente para* $x \in]-2, 2[$ *porque*

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{(-1)^{n+1}}{(n+1)\cdot 2^{n+1}}}{\frac{(-1)^n}{n\cdot 2^n}}\right| = \lim_n \left|\frac{(-1)^{n+1}\cdot n\cdot 2^n}{(-1)^n\cdot(n+1)\cdot 2^{n+1}}\right| \\ &= \lim_n \left|\frac{(-1)^n\cdot(-1)\cdot n\cdot 2^n}{(-1)^n\cdot(n+1)\cdot 2^n\cdot 2}\right| = \lim_n \left|\frac{(-1)\cdot n}{(n+1)\cdot 2}\right| = \lim_n \frac{|-1|\cdot|n|}{|(n+1)\cdot 2|} \\ &= \lim_n \frac{n}{(n+1)\cdot 2} = \lim_n \frac{n}{2n+2} = \lim_n \frac{n}{2n} = \lim_n \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

donde
$$R = \frac{1}{L} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2.$$
A condição de convergência absoluta $|x| < R$ *é então*

$$|x| < 2 \Leftrightarrow -2 < x < 2.$$

Para $x \in \left]-\infty, -2\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ *a série de potências é divergente. Para* $x = -2$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(-2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n (-2)^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$$

que é divergente (a série harmónica). Para $x = 2$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(2) = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n \cdot 2^n}{n \cdot 2^n} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n} = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n} (-1)^n\right].$$

É uma série alternada que, pelo critério de Leibnitz, é convergente (pois $v_n = 1/n$ *é decrescente,* $v_n = 1/n > 0$ *e* $\lim_n v_n = \lim_n (1/n) = 0$*). Assim, o domínio de convergência da série de potências é* $D = \left[-2, 2\right[$ *embora a convergência seja simples em* $x = 2$*.*

Example 66 *A série de potências de* x

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2n-1} x^{2n-1}\right),$$

em que $v_n = 1/(2n-1)$*, é absolutamente convergente para* $x \in \left]-1, 1\right[$ *porque*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{1}{2(n+1)-1}}{\frac{1}{2n-1}}\right| = \lim_n \left|\frac{2n-1}{2(n+1)-1}\right| = \lim_n \left|\frac{2n-1}{2n+1}\right| \\
&= \lim_n \frac{2n-1}{2n+1} = \lim_n \frac{2n}{2n} = \lim_n 1 = 1
\end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/1 = 1$*. A condição de convergência absoluta* $|x| < R$ *é então*
$$|x| < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Note que fazendo directamente do termo geral

$$\begin{aligned}
\lim_n \left| \frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)} \right| &= \lim_n \left| \frac{\dfrac{x^{2(n+1)-1}}{2(n+1)-1}}{\dfrac{x^{2n-1}}{2n-1}} \right| = \lim_n \left| \frac{x^{2(n+1)-1} \cdot (2n-1)}{[2(n+1)-1] \cdot x^{2n-1}} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{x^{2n+1} \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot x^{2n-1}} \right| = \lim_n \left| \frac{x^{2n-1} \cdot x^2 \cdot (2n-1)}{(2n+1) \cdot x^{2n-1}} \right| \\
&= \lim_n \left| \frac{x^2 \cdot (2n-1)}{2n+1} \right| = \lim_n \left(\left| x^2 \right| \cdot \left| \frac{2n-1}{2n+1} \right| \right) \\
&= x^2 \cdot \lim_n \frac{2n-1}{2n+1} = x^2 \cdot 1 = x^2
\end{aligned}$$

obtemos o mesmo intervalo de valores de x pois há que exigir (pelo critério da razão de D'Alemberg)

$$x^2 < 1 \Leftrightarrow -1 < x < 1.$$

Para $x \in \left]-\infty, -1\right[\cup \left]1, +\infty\right[$ a série de potências é divergente. Para $x = 1$ temos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} u_n(1) = \sum_{n \geq 1} \frac{1^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}$$

que é divergente por comparação com a série harmónica (atendendo ao limite

$$\lim_n \frac{\dfrac{1}{2n-1}}{\dfrac{1}{n}} = \lim_n \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2} \neq 0$$

de valor finito não-nulo). Para $x = -1$ temos a série numérica

$$\sum_{n \geq 1} u_n(-1) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{2n-1}}{2n-1} = \sum_{n \geq 1} \frac{-1}{2n-1} = -\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}$$

que, tal como a série $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{2n-1}$, é divergente. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \left]-1, 1\right[$.

Se $R = +\infty$ (caso em que são nulos os limites $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$ e $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$) então o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$.

Example 67 *A série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^n}} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n^{n/2}} x^n \right),$$

em que $v_n = 1/n^{n/2}$, é absolutamente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ porque

$$\begin{aligned} L &= \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\left|\frac{1}{n^{n/2}}\right|} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{n^{n/2}}} = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{\frac{1}{\sqrt{n^n}}} = \overline{\lim_n} \frac{\sqrt[n]{1}}{\sqrt[n]{\sqrt{n^n}}} \\ &= \overline{\lim_n} \frac{1}{\sqrt[n]{(\sqrt{n})^n}} = \overline{\lim_n} \frac{1}{\sqrt{n}} = \frac{1}{\sqrt{+\infty}} = \frac{1}{+\infty} = 0 \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0 = +\infty$. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$ e, para todos os valores de x, a convergência é absoluta.

Example 68 *A série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{n!} x^n \right),$$

em que $v_n = 1/n!$, é absolutamente convergente para todo o $x \in \mathbb{R}$ porque

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| = \lim_n \left| \frac{\frac{1}{(n+1)!}}{\frac{1}{n!}} \right| = \lim_n \left| \frac{n!}{(n+1)!} \right| \\ &= \lim_n \frac{n!}{(n+1)\cdot n!} = \lim_n \frac{1}{n+1} = 0 \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0 = +\infty$. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \mathbb{R}$ e, para todos os valores de x, a convergência é absoluta.

Se $R = 0$ (caso em que são $+\infty$ os limites $\overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}$ e $\lim_n |v_{n+1}/v_n|$) então o domínio de convergência da série de potências é $D = \{0\}$.

Example 69 *A série de potências de x*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x) = \sum_{n\geq 1} n!x^n,$$

em que $v_n = n!$, é absolutamente convergente para $x \in \left]-1, 1\right[$ porque

$$L = \lim_n \left|\frac{(n+1)!}{n!}\right| = \lim_n \frac{(n+1)\,n!}{n!} = \lim_n (n+1) = +\infty$$

donde $R = 1/L = 1/+\infty = 0$. A condição de convergência absoluta $|x| < R$ é então $|x| < 0$. Assim não existem valores de x para os quais a série é absolutamente convergente. Da condição $|x| < R$, que neste caso é $|x| > 0$ (equivalente a $x \neq 0$), concluímos que a série de potências é divergente sempre que $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Para $x = 0$ temos a série numérica

$$\sum_{n\geq 1} u_n(0) = \sum_{n\geq 1} \frac{0^n}{n!} = \sum_{n\geq 1} 0$$

que é absolutamente convergente. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = \{0\}$.

Considere o caso, mais geral, de séries de potências de $x - a$.

Definition 70 *Chama-se* ***série de potências*** *de $x - a$ a toda a série da forma*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x-a) = \sum_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (x-a)^{n-1}\right].$$

Proposition 71 *A série de potências $\sum\limits_{n\geq 1} \left[v_n \cdot (x-a)^{n-1}\right]$ é absolutamente convergente para os valores de x que verifiquem $x \in \left]a-R, a+R\right[$ (ou seja, $|x-a| < R$) e divergente para $x \in \left]-\infty, a-R\right[\cup \left]a+R, +\infty\right[$ (ou seja, $|x-a| > R$) em que R é dado por*

$$R = \frac{1}{L}$$

com

$$L = \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| \quad ou \quad L = \overline{\lim_n} \sqrt[n]{|v_n|}.$$

Se $|x-a| > R$ então a série de potências é divergente.

Para $x = a - R$ e $x = a + R$ (ou seja, $|x - a| = R$) é necessário um estudo particular.

Example 72 *A série de potências de* $x - 1$

$$\sum_{n\geq 1} u_n(x-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(x-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n^2}(x-1)^n\right]$$

em que $v_n = 1/n^2$, *é absolutamente convergente para* $x \in \left]0, 2\right[$ *porque*

$$\begin{aligned} L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\frac{1}{(n+1)^2}}{\frac{1}{n^2}}\right| = \lim_n \left|\frac{n^2}{(n+1)^2}\right| \\ &= \lim_n \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \lim_n \frac{n^2}{n^2} = \lim_n 1 = 1 \end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/1 = 1$. *A condição de convergência absoluta* $|x - 1| < R$ *é então*

$$|x-1| < 1 \Leftrightarrow -1 < x - 1 < 1 \Leftrightarrow 0 < x < 2.$$

Para $x \in \left]-\infty, 0\right[\cup \left]2, +\infty\right[$ *a série de potências é divergente. Para* $x = 0$ *temos a série numérica alternada*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(0-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(0-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}$$

que é absolutamente convergente (a sua série modular é a série de Dirichlet com $\alpha = 2$*). Para* $x = 2$ *temos a série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} u_n(2-1) = \sum_{n\geq 1} \frac{(2-1)^n}{n^2} = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2}$$

que é absolutamente convergente. Assim, o domínio de convergência da série de potências é $D = [0, 2]$ *e para todos os valores de* x *em* D *a convergência é absoluta.*

1.2.1 Desenvolvimentos de Taylor e de MacLaurin

As séries de potências de $x-a$ (e de x) surgem, de forma natural, a partir do desenvolvimento de Taylor de uma função real de variável real $f(x)$.

Definition 73 *Sejam $f : D_f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função real de variável real e $a \in D_f$ um ponto interior a D_f. Se existem com valor real as derivadas de todas as ordens da função f no ponto a define-se o* ***desenvolvimento*** *(ou* ***série****)* ***de Taylor de f no ponto*** *$x = a$ como sendo*

$$\begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)\cdot(x-a) + \frac{f''(a)}{2}\cdot(x-a)^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\cdot(x-a)^3 + \cdots \\ &= \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n-1)}(a)}{(n-1)!}\cdot(x-a)^{n-1}. \end{aligned}$$

Quando $a = 0$, o desenvolvimento

$$f(x) = f(0) + f'(0)\cdot x + \frac{f''(a)}{2}\cdot x^2 + \frac{f^{(3)}(a)}{3!}\cdot x^3 + \cdots = \sum_{n\geq 1} \frac{f^{(n-1)}(0)}{(n-1)!}\cdot x^{n-1}$$

diz-se o ***desenvolvimento*** *(ou* ***série****)* ***de MacLaurin de f.***

Assume-se que $f^{(0)}(a) = f(a)$. O factorial de $n \geq 1$, que é denotado por $n!$, é dado por

$$n! = n\cdot(n-1)\cdot(n-2)\cdot\cdots\cdot 3\cdot 2\cdot 1$$

e, por convenção, o factorial de 0 é 1, $0! = 1$. Note que $1 = 1!$ e $2 = 2!$. O desenvolvimento de Taylor é uma série de potências de $x-a$ e o desenvolvimento de MacLaurin é uma série de potências de x.

Example 74 *Dada $f(x) = (x+3)^2$ sabemos que $f(x) = x^2 + 6x + 9$ (caso notável). Esta forma de escrever f como potências de x também resulta do desenvolvimento de MacLaurin. De facto, temos $f(0) = (0+3)^2 = 9$, $f'(0) = 2(x+3)|_{x=0} = 2\cdot 3 = 6$, $f''(0) = 2|_{x=0} = 2$ e $f'''(0) = f^{(4)}(0) = f^{(5)}(0) = \cdots = 0$, logo*

$$f(x) = 9 + 6\cdot x + \frac{2}{2}\cdot x^2 + \frac{0}{3!}\cdot x^3 + \frac{0}{4!}\cdot x^4 + \frac{0}{5!}\cdot x^5 + \cdots = 9 + 6x + x^2.$$

Example 75 *O desenvolvimento de MacLaurin da função* $y = \exp x$ *é*

$$\begin{aligned}\exp x &= \exp 0 + \exp 0 \cdot x + \frac{\exp 0}{2} \cdot x^2 + \frac{\exp 0}{3!} \cdot x^3 + \frac{\exp 0}{4!} \cdot x^4 + \cdots \\ &= 1 + 1 \cdot x + \frac{1}{2} \cdot x^2 + \frac{1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{4!} \cdot x^4 + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} x^n\end{aligned}$$

para todo o $x \in D = \mathbb{R}$, *dado que as derivadas de todas as ordens de* $f(x) = \exp x$ *é* $f^{(n)}(x) = \exp x$. *O domínio de convergência é* $D = \mathbb{R}$ *da série de potências de* x *obtida resulta da aplicação da Proposição 62 (conforme feito num exemplo anterior). Dado este desenvolvimento, obtemos o desenvolvimento de MacLaurin da função* $y = \exp(-x)$ *como sendo*

$$\exp(-x) = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (-x)^n = \sum_{n \geq 1} \frac{1}{n!} (-1)^n x^n = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n!} x^n.$$

Example 76 *A função* $f(x) = \sin x$ *tem domínio* $D_f = \mathbb{R}$. *As suas derivadas são dadas por*

$$f'(x) = \cos x, \quad f''(x) = -\sin x, \quad f'''(x) = -\cos x, \quad f^{(4)}(x) = \sin x, \ \ldots$$

que se generaliza como

$$\begin{aligned}f^{(4n-4)}(x) &= \sin x, \qquad f^{(4n-3)}(x) = \cos x, \\ f^{(4n-2)}(x) &= -\sin x, \qquad f^{(4n-1)}(x) = -\cos x,\end{aligned}$$

para todo o n. *No ponto* $x = 0$, *temos*

$$f^{(4n-4)}(0) = 0, \quad f^{(4n-3)}(0) = 1, \quad f^{(4n-2)}(0) = 0, \quad f^{(4n-1)}(0) = -1.$$

Assim, $\sin x$ *é igual a*

$$\begin{aligned}& 0 + 1 \cdot x + \frac{0}{2} \cdot x^2 + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{0}{4!} \cdot x^4 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{0}{6!} \cdot x^6 + \frac{-1}{7!} \cdot x^7 + \cdots \\ = \ & 1 \cdot x + \frac{-1}{3!} \cdot x^3 + \frac{1}{5!} \cdot x^5 + \frac{-1}{7!} \cdot x^7 + \cdots = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}\end{aligned}$$

para todo o $x \in D = \mathbb{R}$. *A obtenção do domínio de convergência da série de potências de* x *obtida,*

$$\sum_{n \geq 1} u_n(x) = \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1},$$

resulta da aplicação da Proposição 62. De facto, com $v_n = (-1)^{n-1} / (2n-1)!$ *temos*

$$\begin{aligned}
L &= \lim_n \left|\frac{v_{n+1}}{v_n}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n+1-1}}{[2(n+1)-1]!}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}}\right| = \lim_n \left|\frac{\dfrac{(-1)^{n}}{(2n+1)!}}{\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}}\right| \\
&= \lim_n \left|\frac{(-1)^n \cdot (2n-1)!}{(2n+1)! \cdot (-1)^{n-1}}\right| = \lim_n \left|\frac{(-1)^{n-1} \cdot (-1) \cdot (2n-1)!}{(2n+1) \cdot (2n) \cdot (2n-1)! \cdot (-1)^{n-1}}\right| \\
&= \lim_n \left|\frac{(-1)}{(2n+1) \cdot (2n)}\right| = \lim_n \frac{|-1|}{|(2n+1) \cdot (2n)|} = \lim_n \frac{1}{(2n+1) \cdot (2n)} \\
&= \frac{1}{(+\infty) \cdot (+\infty)} = \frac{1}{+\infty} = 0
\end{aligned}$$

donde $R = 1/L = 1/0 = +\infty$.

Por derivação (em ordem a x*) da igualdade*

$$\sin x = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} x^{2n-1}\right]$$

(note que a derivada da soma é a soma das derivadas) obtém-se

$$\cos x = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!} (2n-1)\, x^{2n-1-1}\right] = \sum_{n \geq 1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-2)!} x^{2n-2}\right]$$

para todo o $x \in \mathbb{R}$ *(note que* $(2n-1)! = (2n-1)(2n-2)!$*), que é o desenvolvimento de MacLaurin da função* $y = \cos x$.

1.3 Exercícios propostos com solução

1. Determine a natureza e, caso exista, a soma de cada uma das seguintes séries numéricas:

   (a) $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{3^n}$ (*Solução:* convergente, $S = 1/2$)

   (b) $\sum_{n \geq 1} \left(\frac{2}{5}\right)^n$ (*Solução:* convergente, $S = 2/3$)

(c) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}\right)$ (*Solução:* convergente, $S=3/2$)

(d) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{n+2}-\frac{3}{n+5}\right)$ (*Solução:* convergente, $S=67/40$)

(e) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^{n-1}}{2}$ (*Solução:* divergente)

(f) $\sum_{n\geq 3}\frac{1}{n^2-1}$ (*Solução:* convergente, $S=5/12$)

(g) $\sum_{n\geq 1}\frac{3^{n+1}}{5^n}$ (*Solução:* convergente, $S=9/2$)

(h) $\sum_{n\geq 1}\frac{1}{(n+2)(n+3)}$ (*Solução:* convergente, $S=1/3$)

(i) $\sum_{n\geq 4}\frac{1}{2^{n-1}}$ (*Solução:* convergente, $S=1/4$)

(j) $\sum_{n\geq 2}\frac{1}{n^2+n}$ (*Solução:* convergente, $S=1/2$)

(k) $\sum_{n\geq 1}\frac{2}{3^n}$ (*Solução:* convergente, $S=1$)

(l) $\sum_{n\geq 1}\frac{4}{n^2+4n+3}$ (*Solução:* convergente, $S=5/3$)

(m) $\sum_{n\geq 2}\frac{2^n+3^n}{7^n}$ (*Solução:* convergente, $S=61/140$)

(n) $\sum_{n\geq 1}\left(\frac{1}{3n+2}-\frac{1}{3n+5}\right)$ (*Solução:* convergente, $S=1/5$)

(o) $\sum_{n\geq 3}\frac{10}{4n^2-1}$ (*Solução:* convergente, $S=1$)

(p) $\sum_{n\geq 3}\left(\frac{4}{5n-1}-\frac{4}{5n+9}\right)$ (*Solução:* convergente, $S=66/133$)

(q) $\sum_{n\geq 2}\left(\frac{n+1}{n+3}-\frac{n+3}{n+5}\right)$ (*Solução:* convergente, $S=-11/15$)

(r) $\sum_{n\geq 2}\left((-1)^n\frac{2n+1}{n(n+1)}\right)$ (*Solução:* simplesmente converg., $S=1$)

(s) $\sum_{n\geq 1} \frac{6}{(n+1)(n+2)(n+3)}$ (*Solução:* simpl. converg., $S = 1/2$)

(t) $\sum_{n\geq 1} \frac{10n+22}{(n+1)(n+2)(n+4)}$ (*Solução:* simpl. converg., $S = 15/4$)

2. Analisando o termo geral, determine a natureza de cada uma das seguintes séries numéricas:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2}{n^2+1}$ (*Solução:* divergente)

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^n}{n^3}$ (*Solução:* divergente)

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2+2n+10}{2n^2-3n+1}$ (*Solução:* divergente)

(d) $\sum_{n\geq 1} \sqrt{\frac{n^2+1}{n+5}}$ (*Solução:* divergente)

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{\sqrt{3n^2-2}}$ (*Solução:* divergente)

(f) $\sum_{n\geq 1} \left(1+\frac{2}{n}\right)^{3n}$ (*Solução:* divergente)

(g) $\sum_{n\geq 1} \left(1-\frac{5}{n^3}\right)^{n}$ (*Solução:* divergente)

(h) $\sum_{n\geq 1} \left(\sqrt[3]{n+1}-\sqrt[3]{n}\right)$ (*Solução:* divergente)

(i) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^5+n-1}{3n^5-n+\cos n}$ (*Solução:* divergente)

(j) $\sum_{n\geq 1} \frac{2^{n-1}+1}{4\cdot 2^{n-1}}$ (*Solução:* divergente)

3. Estude, por comparação, a natureza das seguintes séries numéricas:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{2n^2+5}$ (*Solução:* convergente)

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n+1}}$ (*Solução:* divergente)

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{\sqrt{n^3+1}}$ (*Solução:* convergente)

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n^2+n+1}$ (*Solução:* divergente)

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2+\sqrt{n}}$ (*Solução:* convergente)

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{2}{\sqrt[3]{8n^2-1}}$ (*Solução:* divergente)

(g) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2 \sin \frac{1}{n^2}}{\sqrt{n^2+1}}$ (*Solução:* divergente)

4. Utilize séries de Dirichlet para determinar a natureza das seguintes séries numéricas de termos não-negativos:

(a) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{3n^3+2}$ (*Solução:* convergente)

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^3+2n-2}{3n^4+2n^2+1}$ (*Solução:* divergente)

(c) $\sum_{n\geq 1} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$ (*Solução:* convergente)

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{n}{n\sqrt{n}+1}$ (*Solução:* divergente)

(e) $\sum_{n\geq 1} \sin \frac{1}{n\sqrt{n}}$ (*Solução:* convergente)

(f) $\sum_{n\geq 1} n \sin \frac{3}{n}$ (*Solução:* divergente)

(g) $\sum_{n\geq 1} \tan \frac{2}{n^2}$ (*Solução:* convergente)

(h) $\sum_{n\geq 1} n \sin \frac{1}{n+1}$ (*Solução:* divergente)

(i) $\sum_{n\geq 1} \ln \left(1+\frac{1}{n\sqrt{n}}\right)$ (*Solução:* convergente)

(j) $\sum_{n\geq 1} \dfrac{\sqrt[3]{n^2+1}}{n^2\sqrt{n-1}}$ (*Solução:* convergente)

5. Utilize o critério da razão de Cauchy para classificar, quanto à natureza, as séries numéricas com os seguintes termos gerais:

   (a) $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{3n+2}\right)^n$ (*Solução:* convergente)

   (b) $u_n = \left(\dfrac{4n+1}{3n+5}\right)^n$ (*Solução:* divergente)

   (c) $u_n = \left(\dfrac{2n+4}{2n+1}\right)^{n^2}$ (*Solução:* divergente)

   (d) $u_n = \left(\dfrac{2n+1}{2n+4}\right)^{n^2}$ (*Solução:* convergente)

6. Utilize o critério da razão de D' Alemberg para classificar, quanto à natureza, as séries numéricas cujos termos gerais são os seguintes:

   (a) $u_n = \dfrac{1}{3^n \cdot n^2}$ (*Solução:* convergente)

   (b) $u_n = \dfrac{n}{n^2+n+1}$ (*Solução:* inconclusivo)

   (c) $u_n = \dfrac{2n-1}{2^n}$ (*Solução:* convergente)

   (d) $u_n = \dfrac{2n-1}{n! \cdot 2^n}$ (*Solução:* convergente)

   (e) $u_n = \dfrac{n!}{n^2+2^n}$ (*Solução:* divergente)

   (f) $u_n = \dfrac{3^n \cdot (n!)^2}{(2n)!}$ (*Solução:* convergente)

   (g) $u_n = \dfrac{n \cdot (2n)!}{4^n \cdot (n!)^2}$ (*Solução:* divergente)

   (h) $u_n = \dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{n^3 \cdot 3^n}$ (*Solução:* convergente)

   (i) $u_n = \dfrac{n^2+1}{n!}$ (*Solução:* convergente)

(j) $u_n = \dfrac{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdot \dots \cdot (4n-3)}$ (*Solução:* convergente)

(k) $u_n = \dfrac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot \dots \cdot (2n)}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}$ (*Solução:* divergente)

(l) $u_n = \dfrac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n-1)}{4 \cdot 8 \cdot 16 \cdot \dots \cdot (4n)}$ (*Solução:* convergente)

7. Estude quanto à convergência simples e absoluta as seguintes séries numéricas alternadas:

   (a) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^n \dfrac{2n+1}{n \cdot (n+3)} \right]$ (*Solução:* simplesmente convergente)

   (b) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^n \dfrac{n+1}{2n+3} \right]$ (*Solução:* divergente)

   (c) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^{n+1} \dfrac{3n^2+1}{n^4+n^2-n+7} \right]$ (*Solução:* absolut. convergente)

   (d) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^n \dfrac{3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot \dots \cdot (2n+1)}{2 \cdot 5 \cdot 8 \cdot \dots \cdot (3n-1)} \right]$ (*Solução:* absolut. converg.)

   (e) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^n \dfrac{(n!)^2}{(2n)!} \right]$ (*Solução:* absolutamente convergente)

   (f) $\sum_{n \geq 1} \dfrac{n \cdot \cos(n\pi)}{2n+1}$ (*Solução:* divergente)

8. Estude, em função de $x \in \mathbb{R}$, a natureza das seguintes séries de potências de x:

   (a) $\sum_{n \geq 1} 2x^{n-1}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1, 1[$)

   (b) $\sum_{n \geq 1} \dfrac{x^n}{\sqrt{n}}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1, 1[$ e simplesmente convergente se $x = -1$)

   (c) $\sum_{n \geq 1} \left[(-1)^{n-1} \dfrac{x^{2n-2}}{(2n-2)!} \right]$ (*Solução:* absolut. convergente em $\mathbb{R}$)

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1,1[$ e simplesmente convergente se $x=-1$)

(e) $\sum_{n\geq 1} \left[\frac{(-1)^{n-1}}{n} x^n\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1,1[$ e simplesmente convergente se $x=1$)

(f) $\sum_{n\geq 1} \frac{x^n}{n \cdot 2^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-2,2[$ e simplesmente convergente se $x=-2$)

(g) $\sum_{n\geq 1} \left[(-1)^{n+1} \frac{x^n}{n^2}\right]$ (*Solução:* absolut. convergente se $x \in [-1,1]$)

(h) $\sum_{n\geq 1} (2x)^n$ (*Solução:* absolut. convergente se $x \in]-1/2, 1/2[$)

(i) $\sum_{n\geq 1} \left[(-1)^{n+1} \frac{(2x)^n}{n}\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1/2, 1/2[$ e simplesmente convergente se $x = 1/2$)

(j) $\sum_{n\geq 1} \frac{(2x)^n}{n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1/2, 1/2[$ e simplesmente convergente se $x = -1/2$)

(k) $\sum_{n\geq 1} (3x)^{n^2}$ (*Solução:* absolut. convergente se $x \in]-1/3, 1/3[$)

(l) $\sum_{n\geq 1} \left[\frac{n}{n+1} \left(\frac{x}{2}\right)^n\right]$ (*Solução:* absolut. converg. se $x \in]-2,2[$)

9. Estude, em função de $x \in \mathbb{R}$, a natureza das seguintes séries de potências de $x-a$:

(a) $\sum_{n\geq 1} (x-2)^n$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]1,3[$)

(b) $\sum_{n\geq 1} \frac{2(1-x)^n}{n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]0,2[$ e simplesmente convergente se $x=2$)

(c) $\sum_{n\geq 1} n(x-2)^{n-1}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]1,3[$)

(d) $\sum_{n\geq 1} \frac{(x-2)^n}{(2n-1)\cdot 2^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]0,4[$ e simplesmente convergente se $x=0$)

(e) $\sum_{n\geq 1} \frac{n(x-2)^n}{n^3+1}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [1,3]$)

(f) $\sum_{n\geq 1} 2^n(x-3)^n$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [2,4]$)

(g) $\sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \frac{(x-3)^n}{(2n+1)\cdot\sqrt{n+1}}\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [2,4]$)

(h) $\sum_{n\geq 1} \frac{n!(x+3)^n}{n^n}$ (*Solução:* absolut. converg. se $x \in]-3-e, e-3[$)

(i) $\sum_{n\geq 1} (-1)^n \frac{(x-1)^{2n+1}}{(2n+1)!}$ (*Solução:* absolut. convergente em $\mathbb{R}$)

(j) $\sum_{n\geq 1} \left[\frac{1}{n}(x-2)^n\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]1,3[$ e simplesmente convergente se $x \in \{1,3\}$)

(k) $\sum_{n\geq 1} [n(x-1)^{n-1}]$ (*Solução:* absolut. convergente se $x \in]0,2[$)

(l) $\sum_{n\geq 1} \frac{n^2\cdot[7(x-5)]^n}{2}$ (*Solução:* absolut. converg. se $x \in]34/7, 36/7[$)

10. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais os seguintes desenvolvimentos em série de potências de x convergem para as respectivas funções:

(a) $\frac{1}{1-x} = 1+x+x^2+x^3+\cdots+x^{n-1}+\cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in]-1,1[$)

(b) $\exp(2x) = 1+2x+x^2+\frac{8}{3!}x^3+\cdots+\frac{(2x)^{n-1}}{(n-1)!}+\cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(c) $\exp(x^2) = 1+x^2+\frac{1}{2}x^4+\frac{1}{6}x^6+\cdots+\frac{x^{2n}}{n!}+\cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(d) $x\exp(3x) = x+3x^2+\frac{9}{2}x^3+\frac{27}{6}x^4+\cdots+\frac{3^{n-1}}{(n-1)!}x^n+\cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(e) $a^x = 1 + x\ln a + x^2\dfrac{\ln^2 a}{2!} + \cdots + \dfrac{\ln^{n-1} a}{(n-1)!}x^{n-1} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(f) $\ln|1+x| = x - \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 + \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{n}x^n + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$ e simplesmente convergente em $x = 1$)

(g) $\arctan x = x - \dfrac{1}{3}x^3 + \dfrac{1}{5}x^5 - \cdots + \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$ e simplesmente convergente em $x \in \{-1,1\}$)

(h) $\ln|1-x| = -x - \dfrac{1}{2}x^2 - \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{4}x^4 - \cdots - \dfrac{x^n}{n} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$ e simplesmente convergente em $x = -1$)

(i) $\ln\left|\dfrac{1+x}{1-x}\right| = 2x + \dfrac{2}{3}x^3 + \dfrac{2}{5}x^5 + \cdots + \dfrac{2}{2n-1}x^{2n-1} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$)

(j) $\dfrac{\ln|2x+1|}{x} = 2 - 2x + \dfrac{8}{3}x^2 + \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{2^n x^{n-1}}{n} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1/2,1/2\right[$ e simplesmente convergente em $x = 1/2$)

(k) $\cos(2x) = 1 - \dfrac{(2x)^2}{2!} + \dfrac{(2x)^4}{4!} - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(2x)^{2n-2}}{(2n-2)!} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(l) $\cos^2 x = 1 + \sum_{n\geq 1}\left[(-1)^n\dfrac{2^{2n-1}x^{2n}}{(2n)!}\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(m) $\sqrt{1+x} = 1 + \sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-3)}{2^n \cdot n!}x^n + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [-1,1]$)

(n) $\dfrac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 + \sum_{n\geq 1}\dfrac{(-1)^n \cdot 1\cdot 3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)\cdot x^n}{n!\cdot 2^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$ e simplesmente convergente em $x = 1$)

(o) $\dfrac{x}{\sqrt{1+x}} = x + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot x^{n+1}}{n! \cdot 2^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1,1\right[$ e simplesmente convergente em $x=1$)

(p) $x^2 \sqrt[4]{1+x} = x^2 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n \cdot 3 \cdot 7 \cdot 11 \cdot \cdots \cdot (4n-5) \cdot x^{n+2}}{n! \cdot 4^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [-1,1]$)

(q) $\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) = x + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^n \cdot 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \cdots \cdot (2n-1) \cdot x^{2n+1}}{n! \cdot 2^n \cdot (2n+1)}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in [-1,1]$)

(r) $\dfrac{3}{(1-x)(2x+1)} = 3 - 3x + 9x^2 - \cdots + \left[1+(-1)^{n-1}2^n\right] \cdot x^{n-1} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-1/2, 1/2\right[$)

11. Determine os valores de $x \in \mathbb{R}$ para os quais os seguintes desenvolvimentos em série de potências de $x-a$ convergem para as respectivas funções:

(a) $\sin(2x) = \sin 4 + \sum_{n\geq 1} \left[2^n \sin\left(n\dfrac{\pi}{2}+4\right) \dfrac{(x-2)^n}{n!}\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(b) $\sin x = 1 + \sum_{n\geq 1} \left[(-1)^n \dfrac{\left(x-\frac{\pi}{2}\right)^{2n}}{(2n)!}\right]$ (*Solução:* absolutamente convergente em $\mathbb{R}$)

(c) $\exp x = e + \sum_{n\geq 1} \dfrac{e\,(x-1)^n}{n!}$ (*Solução:* absolut. convergente em $\mathbb{R}$)

(d) $\dfrac{1}{x} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4}(x-2) + \dfrac{1}{8}(x-2)^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\dfrac{(x-2)^{n-1}}{2^n} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]0,4\right[$)

(e) $\ln|x| = -(x+1) - \dfrac{1}{2}(x+1)^2 - \cdots - \dfrac{(x+1)^n}{n} + \cdots$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]-2,0\right[$ e simplesmente convergente em $x=-2$)

(f) $\ln|x| = \ln 2 + \sum_{n\geq 1} \dfrac{(-1)^{n-1} \cdot (x-2)^n}{n \cdot 2^n}$ (*Solução:* absolutamente convergente se $x \in \left]0,4\right[$ e simplesmente convergente em $x=4$)