

Séries de Funções

- Designa-se por **série de funções** a uma expressão do tipo:

$$f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$$

em que $f_1, f_2, \dots, f_n, \dots$ são funções definidas num certo domínio $D \subset \mathbb{R}$.

- A série $f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_n(x) + \dots = \sum_{n \geq 1} f_n(x)$ será convergente num ponto $x_0 \in \mathbb{R}$ se a série numérica

$$f_1(x_0) + f_2(x_0) + \dots + f_n(x_0) + \dots = \sum_{n \geq 1} f_n(x_0) \quad \text{for convergente.}$$

- **Casos particulares de séries de funções:**

1. Série de potências de x

- ✓ Série de potência de x é uma expressão do tipo:

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n + \dots = \sum_{n \geq 0} a_nx^n$$

- ✓ Resultado (análise da natureza da série)

A série de potência de x , $\sum_{n \geq 0} a_nx^n$ é:

- absolutamente convergente pra $x \in]-r, r[$
- Divergente para $x \in]-\infty, -r[\cup]r, +\infty[$,

$$\text{onde} \quad r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- Para os pontos $x = -r$ e $x = r$ é necessário estudar, caso a caso, a natureza da série numérica resultante.

2. Série de potências de $x - a$

- ✓ Série de potência de $x-a$ é uma expressão do tipo:

$$\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \dots + a_n(x-a)^n + \dots$$

- ✓ Resultado (análise da natureza da série)

A série de potência de $x-a$, $\sum_{n \geq 0} a_n (x-a)^n$ é:

- absolutamente convergente pra $x \in]a-r, a+r[$
- Divergente para $x \in]-\infty, a-r[\cup]a+r, +\infty[$,

$$\text{onde } r = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

- Para os pontos $x=a-r$ e $x=a+r$ é necessário estudar, caso a caso, a natureza da série numérica resultante.