Séries de Dirichlet, geométricas e de Mengoli

D1 Séries de Dirichlet. São da forma

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^\alpha}$$

para certo $\alpha \in \mathbb{Q}^+$. São convergentes se $\alpha > 1$ e divergentes se $\alpha \leq 1$. Quando $\alpha = 1$ a série também se designa por *série harmónica*.

G2 Séries geométricas. São da forma

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left(a \cdot r^{n-1}\right),$$

com $a, r \in \mathbb{R}$ e $a \neq 0$. O número real r é a *razão* da série e a é o valor do seu primeiro termo. Tem-se $S_n = (n+1)\,a$ quando $r = 1$ (trata-se da série de termo geral constante igual a a) e

$$\boxed{S_n = \frac{a\,(1-r^n)}{1-r}} \qquad \text{quando } r \neq 1.$$

Assim, a série é convergente se $|r| < 1$ (i.e., se $-1 < r < 1$), com soma

$$S = \lim_n \frac{a\,(1-r^n)}{1-r} = \frac{a}{1-r}\left(1 - \lim_n r^n\right) = \frac{a}{1-r}$$

(pois $r^n \to 0$), e é divergente no caso contrário (i.e., se $|r| \geq 1$, ou ainda, se $r \leq -1 \vee r \geq 1$). Note que se $r = 1$ então $S_n = (n+1)\,a \to +\infty \cdot a = \infty$, se $r > 1$ então $r^n \to +\infty$, e se $r \leq -1$ então não existe[1] o limite de r^n.

M3 Séries de Mengoli, telescópicas ou redutíveis. São da forma

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} \left(a_n - a_{n+p}\right),$$

para certo $p \in \mathbb{N}$. Tem-se

$$\boxed{S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n}.$$

Assim, a série é convergente se existir, e com valor finito, o limite $\lim a_n$ e é divergente no caso contrário. Quando existe, a soma da série é dada por

$$S = \lim_n \left(a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n\right) = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot \lim_n a_n.$$

[1] Se $r = -1$ temos $\sum_{n\geq 1} \left[a \cdot (-1)^{n-1}\right] = a - a + a - a + a - \cdots$ mas a sucessão das somas parciais

$$S_n = \begin{cases} a & \text{se } n \text{ ímpar} \\ 0 & \text{se } n \text{ par} \end{cases}$$

não tem limite (note que $a \neq 0$), logo a série é divergente.