[Elaborado por Rosário Laureano]

Sobre séries de Mengoli

Uma série numérica com a forma geral

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+p}),$$

para certo $p \in \mathbb{N}$, é designada por **série de Mengoli** (**telescópica** ou **redutível**). O termo geral da sucessão de somas parciais é dado por

$$S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n.$$

Concluímos então que a série é convergente se existir, e com valor finito, o limite $\lim a_n$ e é divergente no caso contrário. Quando existe, a soma da série é dada por

$$S = \lim_n (a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot a_n) = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot \lim_n a_n$$

e podemos escrever

$$\sum_{n\geq 1} u_n = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+p}) = a_1 + a_2 + \cdots + a_p - p \cdot \lim_n a_n.$$

Remark 1 *No caso da série se iniciar para valores de n superiores a 1, ela pode ser escrita com base na série respectiva para $n \geq 1$, sempre que esta faça sentido. Por exemplo,*

$$\sum_{n>3} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n\geq 4} \frac{1}{n(n+2)} = \underbrace{-\frac{1}{3}}_{com\ n=1} \underbrace{-\frac{1}{8}}_{com\ n=2} \underbrace{-\frac{1}{15}}_{com\ n=3} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}.$$

Dado que a soma da série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)}$$

é $S = 3/4$ (exercício 3.3 do Caderno), a soma S' da série dada é

$$S' = -\frac{1}{3} - \frac{1}{8} - \frac{1}{15} + \frac{3}{4}.$$

Example 2 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)}$$

é uma série de Mengoli porque existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)} = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+p}).$$

Na verdade, existe uma constante real A tal que

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A}{n(n+1)} - \frac{A}{(n+1)(n+2)}.$$

Reduzindo ao mesmo denominador, a igualdade anterior é equivalente a

$$\frac{3}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A(n+2)}{n(n+1)(n+2)} - \frac{An}{n(n+1)(n+2)} = \frac{A(n+2)-An}{n(n+1)(n+2)}$$

de que resultam as igualdades

$$3 = A(n+2) - An \Leftrightarrow 3 = An + 2A - An \Leftrightarrow 3 = 2A \Leftrightarrow A = 3/2.$$

Temos então

$$\begin{aligned}\sum_{n\geq 1} \frac{3}{n(n+1)(n+2)} &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{3/2}{n(n+1)} - \frac{3/2}{(n+1)(n+2)}\right)\\ &= \sum_{n\geq 1}\left(\frac{3}{2n(n+1)} - \frac{3}{2(n+1)(n+2)}\right)\end{aligned}$$

o que mostra tratar-se de uma série de Mengoli com

$$a_n = \frac{3}{2n(n+1)}$$

e $p = 1$. É uma série convergente cuja soma é dada por

$$\begin{aligned} S &= a_1 + 1 \cdot \lim_n a_n = \frac{3}{2(1+1)} - 1 \cdot \lim_n \frac{3}{2n(n+1)}\\ &= \frac{3}{4} - 1 \cdot \lim_n \frac{3}{2n(n+1)} = \frac{3}{4} - 1 \cdot \frac{3}{+\infty} = \frac{3}{4} - 1 \cdot 0 = \frac{3}{4}.\end{aligned}$$

Example 3 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 2} \frac{1}{n(n+2)}$$

pode ser escrita como

$$-\underbrace{\frac{1}{3}}_{com\ n=1} + \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)},$$

visto que para $n = 1$ se obtem o termo $u_1 = 1/3$. Esta última série é de Mengoli porque existe $p \in \mathbb{N}$ tal que

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)} = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+p}).$$

Na verdade, dadas as igualdades

$$\frac{1}{n(n+2)} = \frac{1/2}{n} - \frac{1/2}{n+2} = \frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)},$$

temos

$$\begin{aligned} \sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+2)} &= \sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{2n} - \frac{1}{2(n+2)} \right) \\ &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{6} \right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{8} \right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{10} \right) + \left(\frac{1}{8} - \frac{1}{12} \right) + \cdots \end{aligned}$$

com $a_n = 1/(2n)$ *e* $p = 2$. *É uma série convergente cuja soma é dada por*

$$S = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \lim_n \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \cdot \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - 2 \cdot 0 = \frac{3}{4}.$$

Como tal, a série dada tem soma

$$S' = -\frac{1}{3} + \frac{3}{4} = \frac{5}{12}.$$

Example 4 ***(Exerc. 3.5 do Caderno)*** *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

é uma série de Mengoli porque existe $p \in \mathbb{N}$ *tal que*

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \sum_{n\geq 1} (a_n - a_{n+p}).$$

Na verdade, existe uma constante real A *tal que a fracção*

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

é igual à diferença de fracções

$$\frac{A}{n(n+1)(n+2)(n+3)} - \frac{A}{(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)},$$

ou seja, à diferença de fracções (de denominadores iguais)

$$\frac{A(n+4)}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} - \frac{An}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}.$$

Temos então

$$\frac{1}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)} = \frac{A(n+4) - An}{n(n+1)(n+2)(n+3)(n+4)}$$

de que resultam as igualdades

$$1 = A\,(n+4) - An \Leftrightarrow 1 = An + 4A - An \Leftrightarrow 1 = 4A \Leftrightarrow A = 1/4.$$

Assim, a série

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)}$$

pode ser escrita como

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1/4}{n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} - \frac{1/4}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} \right)$$

ou ainda,

$$\sum_{n\geq 1} \left(\frac{1}{4n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} - \frac{1}{4\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)\,(n+4)} \right)$$

o que mostra tratar-se de uma série de Mengoli com

$$a_n = \frac{1}{4n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

e $p = 1$. *É uma série convergente cuja soma é dada por*

$$\begin{aligned} S &= a_1 + 1 \cdot \lim_n a_n = \frac{1}{96} - 1 \cdot \lim_n \frac{1}{4n\,(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} \\ &= \frac{1}{96} - 1 \cdot \frac{1}{+\infty} = \frac{1}{96} - 1 \cdot 0 = \frac{1}{96}. \end{aligned}$$

Example 5 *A série numérica*

$$\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n}{n+1}$$

é uma série de Mengoli porque

$$\sum_{n\geq 1} \ln \frac{n}{n+1} = \sum_{n\geq 1} \left[\ln n - \ln(n+1) \right].$$

Assim temos o termo geral com a estrutura $a_n - a_{n+p}$ *com* $a_n = \ln n$ *e* $p = 1$. *É uma série divergente dado o limite de* a_n *não tem valor finito. De facto,*

$$\lim_n a_n = \lim_n \ln n = +\infty.$$