

Resultados de convergência de séries

R1 Série modular.

Dada uma série $\sum_{n \geq 1} u_n$, a série de termos não-negativos $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ diz-se a sua *série modular*.

R2 Convergência absoluta.

Uma série $\sum_{n \geq 1} u_n$ diz-se *absolutamente convergente* quando a série modular $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ é convergente. Neste caso, também a série (original) $\sum_{n \geq 1} u_n$ é convergente (dado o resultado R3)

$$\boxed{\sum_{n \geq 1} |u_n| \text{ série convergente} \implies \sum_{n \geq 1} u_n \text{ série convergente}}$$

ou seja, uma série $\sum_{n \geq 1} u_n$ é convergente sempre que a sua série modular $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ o for.

R4 Convergência simples.

Uma série numérica $\sum_{n \geq 1} u_n$ diz-se *simplesmente convergente* quando é convergente mas a sua série modular $\sum_{n \geq 1} |u_n|$ é divergente (ou seja, $\sum_{n \geq 1} u_n$ convergente mas não é absolutamente convergente).

$$\boxed{\text{R5 Relações. } \text{Convergência absoluta} \implies \text{Convergência simples}}$$

$$\boxed{\text{Não-convergência simples} \implies \text{Não-convergência absoluta}}$$

$$\boxed{\text{Convergência simples} \not\Rightarrow \text{Convergência absoluta}}$$

R6 A série de potências $\sum_{n \geq 1} \left[v_n \cdot (x - a)^{n-1} \right]$ é absolutamente convergente para os valores de x que verifiquem $x \in]a - R, a + R[$ (ou seja, $|x - a| < R$) e divergente para $x \in]-\infty, a - R[\cup]a + R, +\infty[$ (ou seja, $|x - a| > R$) em que R é dado por

$$R = \frac{1}{L}$$

com

$$L = \lim_n \left| \frac{v_{n+1}}{v_n} \right| \quad \text{ou} \quad L = \overline{\lim}_n \sqrt[n]{|v_n|}.$$

Se $|x - a| > R$ então a série de potências é divergente. Para $x = a - R$ e $x = a + R$ (ou seja, $|x - a| = R$) é necessário o estudo particular da série numérica respectiva.