Sobre Programação Linear (PL)

ANO LECTIVO: 2013/2014

GA4

Elaborado pela docente ROSÁRIO LAUREANO

DM – Dpto de Matemática

1 Programação Linear (PL) – um caso particular de Programação Matemática

A Programação Matemática é uma área fundamental da Investigação Operacional de apoio a Processos de Decisão (o termo "programação" deve ser entendido como "planeamento" com vista a alcançar determinados objectivos).

Em Programação Matemática são abordados problemas (ou modelos) de maximização de lucros – problemas de tipo MAX – ou de minimização de custos – problemas de tipo MIN –, que estudam o efeito de certas restrições (ou condicionamentos) sobre os valores de uma dada função. Esta função é designada por **função objectivo** (**f.o.**) e diz-se sujeita às (**s.a.**) restrições referidas. Essas restrições são frequentemente definidas por desigualdades, pois exprimem limites máximos ou limites mínimos de recursos ou de níveis de actividade.

Resolver um problema de Programação Matemática é obter o(s) **ponto(s) óptimo** (ou **solução óptima**). Este(s) corresponde(m) a **ponto(s) de máximo**, num problema **MAX**(f), e a **ponto(s) de mínimo** num problema **MIN**(f).

A **forma** (ou **modelo**) **geral** de um problema de Programação Matemática com n variáveis independentes e m restrições é dada por

$$OPT \quad Z = f(x_1, x_2, \dots, x_n) \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \varphi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ (\leq, \geq, =) \ 0 \\ \varphi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ (\leq, \geq, =) \ 0 \\ \cdots \\ \varphi_m(x_1, x_2, \dots, x_n) \ \ (\leq, \geq, =) \ 0 \\ \\ x_1, x_2, \dots, x_n \ (\geq 0, \leq 0, \text{livre}) \end{cases} .$$

A f.o. $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ está sujeita a m restrições definidas por $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_m$. As n variáveis independentes $x_1, x_2, \dots, x_n$ dizem-se as **variáveis de decisão** do problema por serem as que descrevem completamente as decisões a tomar. As m restrições definidas por $\varphi_i(x_1, x_2, \dots, x_n)$, com $i = 1, 2, \dots, m$, são designadas por **restrições técnicas** (ou **funcionais**) e as n imposições

$$x_1, x_2, \dots, x_n \ (\geq 0, \leq 0, \text{livre}),$$

relativas ao sinal admitido para cada uma das variáveis de decisão, são designadas por **restrições lógicas** (ou **restrições de sinal**).

O conjunto S de todos os pontos $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ que verificam as m restrições técnicas e as n restrições lógicas formam a **região admissível** (**conjunto de oportunidades** ou **espaço de soluções admissíveis**). Se a região admissível S é um conjunto vazio então o problema diz-se **impossível**.

Remark 1 *Um problema de minimização,* $\boldsymbol{MIN}(f)$*, numa certa região admissível* S *é equivalente ao problema de maximização* $\boldsymbol{MAX}(-f)$ *na mesma região admissível (ou seja, mantendo as mesmas restrições técnicas e lógicas).*

Na resolução de problemas de Programação Matemática são aplicados métodos que vão para além do conhecido método dos multiplicadores de Lagrange, usado quando as restrições são dadas por igualdades. É o caso do método de Kuhn-Tucker, um método muito geral que generaliza o método dos multiplicadores de Lagrange. Note-se, no entanto, que enquanto o método dos multiplicadores de Lagrange se aplica apenas para $m < n$, em problemas de Programação Matemática não existe limitação para o número m de restrições desde que estas definam uma região admissível S não-vazia.

1.1 Programação Linear (PL)

A Programação Linear (PL) é um ramo da Programação Matemática. Aborda problemas (ou modelos) em que as funções f e φ_i, com $i = 1, 2, \ldots, m$, são funções lineares dos respectivos argumentos (portanto, matricialmente "representáveis").

Um problema de PL pode ser formulado na **forma** (ou **modelo**) **geral** como

$$
\begin{aligned}
OPT\;\; Z &= c_1 \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \\
\text{s.a.} &\left\{
\begin{array}{l}
a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \;\; (\leq, \geq, =)\;\; b_1 \\
a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \;\; (\leq, \geq, =)\;\; b_2 \\
\cdots \\
a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \;\; (\leq, \geq, =)\;\; b_m \\
\\
x_1, x_2, \ldots, x_n \; (\geq 0, \leq 0, \text{livre})
\end{array}
\right. ,
\end{aligned}
$$

onde os coeficientes c_j (com $j = 1, 2, \ldots, n$), b_i (com $i = 1, 2, \ldots, m$) e a_{ij} (com $i = 1, 2, \ldots, m$ e $j = 1, 2, \ldots, n$) são constantes reais. A variável dependente Z corresponde ao valor da f.o.

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \cdots + c_n x_n$$

e traduz o lucro (num problema MAX(f)) ou o custo (num problema MIN(f)) associado ao problema. Cada coeficiente c_j, com $j = 1, 2, \ldots, n$, diz-se o coeficiente da variável de decisão x_j na f.o. e traduz o lucro unitário ou o custo unitário associado a essa variável. Cada coeficiente b_i, onde $i = 1, 2, \ldots, m$, diz-se o termo independente da i-ésima restrição técnica R_i.

Um problema MAX(f) de PL pode ser formulado na **forma canónica** (ou **standard**) como

$$
\begin{aligned}
MAX \quad Z &= c_1 \cdot x_1 + c \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \\
&\text{s.a.} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \leq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \leq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \leq b_m \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}
\end{aligned}
$$

em que todas as variáveis de decisão são não-negativas[1]. A variável dependente Z traduz o lucro (num problema MAX) e cada coeficiente c_j, onde $j = 1, 2, \ldots, n$, traduz o lucro unitário associado à variável de decisão x_j. Esta forma canónica pode ser resumida como

$$
MAX \quad Z = \sum_{j=1}^{n} (c_j \cdot x_j) \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \sum_{j=1}^{n} (a_{ij} \cdot x_j) \leq b_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m \\ \\ x_j \geq 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n \end{cases}
$$

[1]Um problema MIN(f) de PL pode ser formulado na **forma** (ou **modelo**) **canónica** (ou **standard**) como

$$
MIN \quad Z = c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + \cdots + c_n \cdot x_n \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} a_{11} \cdot x_1 + a_{12} \cdot x_2 + \cdots + a_{1n} \cdot x_n \geq b_1 \\ a_{21} \cdot x_1 + a_{22} \cdot x_2 + \cdots + a_{2n} \cdot x_n \geq b_2 \\ \cdots \\ a_{m1} \cdot x_1 + a_{m2} \cdot x_2 + \cdots + a_{mn} \cdot x_n \geq b_m \\ \\ x_1, x_2, \ldots, x_n \geq 0 \end{cases}
$$

em que todas as variáveis de decisão são não-negativas. A variável dependente Z traduz o custo e cada coeficiente c_j, com $j = 1, 2, \ldots, n$, traduz o custo unitário associado à variável de decisão x_j.

Matricialmente, esta forma canónica é dada por

$$MAX \quad Z = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{X} \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} \leq \mathbf{B} \\ \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

em que $\mathbf{X}$ é a matriz coluna das variáveis de decisão do problema, $\mathbf{C}^T$ é a matriz linha dos coeficientes c_j da f.o., $\mathbf{A}$ é a matriz de m linhas dos coeficientes presentes nas m restrições técnicas ($\mathbf{A}$ é uma matriz de tipo $m \times n$) e $\mathbf{B}$ é a matriz coluna dos termos independentes b_i do lado direito de cada restrição técnica R_i.

Obtenção da forma canónica (a partir da forma geral). Quando na forma geral existe uma variável de decisão x_j negativa, efectuamos a substituição dessa variável por $-x_{n+1}$, com $x_{n+1} \geq 0$, em todo o problema (tanto na f.o. f como nas m restrições técnicas). No caso de existir, na forma geral, uma variável de decisão x_j livre, devemos considerá-la como a diferença de duas outras variáveis novas não-negativas, $x_j = x_{n+1} - x_{n+2}$, com $x_{n+1} \geq 0$ e $x_{n+2} \geq 0$, e substituí-la como tal tanto na f.o. f como nas m restrições técnicas.

Example 2 *Ao problema de PL (na forma geral)*

$$MAX \quad Z = x_1 + 2x_2 + 6x_3 \quad s.a. \quad \begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 \leq -1 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 \leq 13 \\ \\ x_1 \geq 0, \ x_2 \leq 0, \ x_3 \ livre \end{cases} .$$

corresponde, fazendo $x_2 = -x_4$ e $x_3 = x_5 - x_6$, a forma canónica

$$MAX \quad Z = x_1 - 2x_4 + 6x_5 - 6x_6 \quad s.a. \quad \begin{cases} 3x_1 - x_4 + x_5 - x_6 \leq -1 \\ 2x_1 - 5x_4 - x_5 + x_6 \leq 13 \\ \\ x_1, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{cases} .$$

Um conjunto $S \subset \mathbb{R}^n$ diz-se **convexo** se

$$\theta x + (1 - \theta) \widetilde{x} \in S$$

sempre que $x, \widetilde{x} \in S$ e θ toma valores no intervalo $[0, 1]$. Quando θ percorre o intervalo unitário $[0, 1]$, a expressão $\theta x + (1 - \theta) \widetilde{x}$ – designada por **combinação convexa** de x e $\widetilde{x}$ – gera todos os pontos do segmento de recta que une o ponto x ao ponto $\widetilde{x}$. Assim, sempre que os pontos x e $\widetilde{x}$ pertencem a S, também está contido em S o segmento de recta que os une. Um ponto de S diz-se **ponto extremo** se não se pode exprimir como combinação convexa de outros dois pontos de S.

Proposition 3 *A região admissível $S \subset D_f = \mathbb{R}^n$ de um problema de PL é um conjunto convexo fechado com um número finito de pontos extremo.*

Cada ponto extremo é um dos vértices do polígono que corresponde à região admissível. O resultado seguinte é de grande importância em PL.

Proposition 4 *Quando existe(m) ponto(s) óptimo (de máximo ou de mínimo) de um problema de PL, a f.o. atinge esse(s) ponto(s) óptimo num ponto extremo da região admissível S.*

1.1.1 Método do gradiente

Com base na Proposição 4 é possível, quando $n = 2$ é o número de variáveis de decisão do problema de PL, efectuar a sua resolução pelo **método do gradiente** (ou **método gráfico**). Tal exige a representação gráfica da região admissível S e a determinação do(s) ponto(s) extremo de S que optimiza(m) a f.o.. Sempre que um problema de PL tem apenas duas variáveis de decisão, é fácil representar graficamente a sua região admissível S num sistema de eixos bidimensional cartesiano (plano cartesiano), e visualizar o exposto quanto a conjuntos convexos e pontos extremo. Sendo um problema linear, à f.o. e aos relaxamentos das restrições correspondem rectas no plano cartesiano das variáveis de decisão.

Considere o seguinte problema de PL:

Problem 5 *"Uma empresa pretende optimizar a produção mensal de dois produtos A e B em madeira num período máximo de 110 horas. Dispõe de 300 metros de madeira. Enquanto para produzir cada unidade do produto A são necessários 30 metros de madeira e 5 horas de trabalho, para produzir cada unidade do produto B são necessários apenas 20 metros de madeira mas 10 horas de trabalho. O lucro unitário de venda é de 6 euros no produto A e de 8 euros no produto B. O objectivo é maximizar o lucro total de venda da produção."*

São possíveis vários níveis de produção (uma unidade do produto A e duas de B, etc.) mas estes estão limitados superiormente pelos 300 metros de madeira e pelas 110 horas de trabalho disponíveis (recursos críticos disponíveis). De entre os possíveis níveis de produção há que determinar qual (ou quais) pode(m) ser classificado(s) como óptimo(s) face ao objectivo a atingir, a maximização do lucro.

Sejam x_A o número de unidades do produto A e x_B o número de unidades do produto B a produzir. Assim, x_A e x_B são as variáveis de decisão não-negativas do problema. Programar matematicamente este problema corresponde a obter a formulação geral

$$MAX\ Z = 6x_A + 8x_B \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} 30x_A + 20x_B \leq 300 \\ 5x_A + 10x_B \leq 110 \\ \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases} .$$

Consideremos um sistema de eixos cartesiano com o eixo das abcissas associado a x_A e o eixo das ordenadas associado a x_B. Qualquer dos pontos (x_A, x_B) da região admissível S deve satisfazer quer as restrições técnicas $30x_A + 20x_B \leq 300$ quer as restrições lógicas $x_A, x_B \geq 0$. Traçando cada uma das rectas de relaxamento

$$30x_A + 20x_B = 300 \quad \text{e} \quad 5x_A + 10x_B = 110,$$

obtemos a divisão do plano em dois semiplanos disjuntos em que cada uma das restrição técnicas é válida apenas nos pontos (x_A, x_B) de um desses semiplanos. Atendendo ainda a que, pelas restrições lógicas $x_A \geq 0$ e $x_B \geq 0$, apenas os pontos (x_A, x_B) do 1^o quadrante são soluções admissíveis. O conjunto convexo S do problema obtém-se por intersecção de todos os semiplanos relativos às quatro restrições. O ponto de intersecção da recta $30x_A + 20x_B = 300$ com o x_A-eixo é $(10, 0)$, o ponto de intersecção da recta $5x_A + 10x_B = 110$ com o x_B-eixo é $(0, 11)$ e o ponto de intersecção das duas rectas é $(4, 9)$. Assim,

$$E_1(0,0), \quad E_2(0,11), \quad E_3(4,9) \ \text{ e } E_4(10,0)$$

são os pontos extremo deste problema de PL. Pela Proposição 4, há que determinar em qual dos quatro pontos extremos a f.o. (função lucro total de venda) $f(x_A, x_B) = 6x_A + 8x_B$ atinge o seu valor máximo.

Considere ainda o seguinte resultado do cálculo diferencial.

Proposition 6 *A taxa de variação de uma função $f(x,y)$ num ponto (a,b) é máxima (respectivamente, mínima) na direcção e sentido do vector unitário (único) que tenha a mesma direcção e o mesmo sentido do (respectivamente, sentido oposto ao) vector gradiente*

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f}(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) \right).$$

Assim, o **vector gradiente** indica a direcção e o sentido em que a função $f(x,y)$ **aumenta** mais rapidamente. Além disso, o vector gradiente é perpendicular às curvas de nível da função f. Se f é uma função linear então as suas curvas de nível são rectas.

Continuemos com o Problema 5. O lugar geométrico dos valores possíveis para a f.o. é o plano de equação $Z = 6x_A + 8x_B$. Consideremos ainda a igualdade

$$Z = f(x_A, x_B) = 6x_A + 8x_B$$

para diferentes valores de Z. Para cada valor de Z fixado, obtem-se uma recta de declive negativo $m = -3/4$ (recta de nível). O traçado de cada uma destas rectas de nível pode ser efectuado no sistema de eixos cartesiano Ox_Ax_B. Em particular, tracemos a recta de nível correspondente a $Z = 0$ (ausência de produção),

$$x_B = -\frac{3}{4}x_A = -0.75x_A,$$

que passa no ponto $E_1(0,0)$. As derivadas parciais

$$\frac{\partial f}{\partial x_A}(x_A, x_B) = 6 \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial x_B}(x_A, x_B) = 8$$

fornecem as taxas de variação da função f em ordem à variação marginal de cada uma das variáveis x_A e x_B. O vector gradiente

$$\overrightarrow{\text{grad}\, f(x_A, x_B)} = \left(\frac{\partial f}{\partial x_A}(x_A, x_B), \frac{\partial f}{\partial x_B}(x_A, x_B) \right) = (6, 8)$$

é perpendicular às rectas de nível da função f e indica a direcção e o sentido em que a f.o. $f(x_A, x_B)$ aumenta mais rapidamente. Assim, o valor da f.o. é tanto maior quanto mais nos afastamos da origem, por sucessivas rectas paralelas a $x_B = -0.75x_A$, no sentido ascendente indicado pelo vector gradiente $(6, 8)$ (varimento da região admissível pela f.o.) e a última recta de nível que intersecta um ponto da região admissível é a correspondente ao máximo da f.o.. Esse ponto é o ponto extremo $E_3(4, 9)$ que é então o ponto óptimo[2]. O Plano de Decisão Óptimo de Produção é portanto de 4 unidades do produto A e de 9 unidades do produto B a que corresponde o lucro total máximo de $96 = f(4, 9)$ euros.

Remark 7 *Se a curva de nível correspondente ao valor máximo da f.o. intersecta a região admissível em mais do que um ponto, haverá um número infinito de pontos óptimo e o problema diz-se* ***indeterminado*** *ou de* ***soluções óptimas múltiplas****.*

1.1.2 Método do Simplex

O método do Simplex de George Dantzig é um dos métodos algébricos para resolução de problemas de PL. Trata-se de um algoritmo matricial que permite obter soluções numéricas de problemas de PL com qualquer número n de variáveis de decisão (portanto, para $n \geq 2$). Este método consiste num processo iterativo que se inicia num ponto extremo admissível (i.e., num ponto extremo da região admissível S), normalmente a origem, e que sistematicamente se desloca para um outro ponto extremo admissível até ser encontrado o ponto extremo óptimo. A sua aplicação exige que o problema de PL este esteja escrito na **forma normal**.

Um problema de PL diz-se escrito na **forma normal** quando, em notação matricial, é dado por

$$OPT \quad Z = \mathbf{C}^T \cdot \mathbf{X} \quad \text{s.a.} \quad \begin{cases} \mathbf{A} \cdot \mathbf{X} = \mathbf{B} \\ \\ \mathbf{X} \geq 0 \end{cases}$$

em que $\mathbf{X}$ é a matriz coluna de todas as variáveis do problema, $\mathbf{C}^T$ é a matriz linha dos coeficientes c_j da f.o., $\mathbf{A}$ é a matriz de m linhas dos coeficientes

[2] Calculando os valores de Z

$$f(0, 0) = 0, \quad f(0, 11) = 88, \quad f(4, 9) = 96 \quad \text{e} \quad f(10, 0) = 60$$

confirmamos que f atinge o ponto óptimo (de máximo) em $E_2(4, 9)$. Contudo este procedimento pode ser dificultado pela presença de parâmetros no modelo.

presentes nas m restrições técnicas e $\mathbf{B} \geq 0$ é a matriz coluna dos termos independentes b_i do lado direito de cada restrição técnica R_i.

Obtenção da forma normal (a partir da forma canónica). Começamos por garantir que todos os termos independentes do lado direito de cada restrição técnica sejam não-negativos. Se algum desses termos for negativo, multiplicamos a respectiva restrição técnica por -1. Deste modo, uma restrição técnica de tipo "$\leq$" é transformada numa restrição técnica de tipo "$\geq$" e vice-versa. Dado que as m restrições técnicas são dadas, em geral, por desigualdades, segue-se a introdução de novas variáveis que transformem as m restrições técnicas em igualdades (caso não o sejam) equivalentes. Para tal, adicionamos ou subtraímos uma variável não-negativa ao lado esquerdo de cada restrição técnica de tipo "$\leq$" ou "$\geq$", respectivamente. Concretamente, a uma restrição técnica do tipo "$\leq$"

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n \leq b_i$$

com $b_i \geq 0$ (em que $i = 1, 2, \ldots, m$) é dada a forma

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n + s_i = b_i,$$

onde $s_i \geq 0$ é designada por **variável de folga** correspondente à i-ésima restrição R_i. Por outro lado, a uma restrição técnica do tipo "$\geq$",

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n \geq b_i$$

com $b_i \geq 0$ (em que $i = 1, 2, \ldots, m$) é dada a forma

$$a_{i1} \cdot x_1 + a_{i2} \cdot x_2 + \cdots + a_{in} \cdot x_n - t_i = b_i,$$

onde $t_i \geq 0$ é designada por **variável de excesso** (ou **excedentária**) correspondente à i-ésima restrição R_i. A introdução de variáveis de folga ou de excesso não altera a natureza das restrições técnicas nem da f.o.: na f.o. essas variáveis constam com coeficiente 0. Após considerar as variáveis de folga e de excesso necessárias, introduzimos novas variáveis não-negativas u_i do lado esquerdo de cada restrição técnica i que não contenha uma variável de folga s_i. Tal é necessário quando existem restrições do tipo "$\geq$" e/ou do tipo "$=$". Estas variáveis são designadas por **variáveis artificiais**[3]. Após este procedimento, cada restrição técnica i possui na forma normal uma variável de folga

[3]Estas variáveis vêem garantir que não surgem proposições contraditórias com as restrições de sinal de cada t_i e a não-negatividade de cada b_i quando se considera ausência

s_i ou uma variável artificial u_i com coeficiente 1. Ao contrário das variáveis de folga ou de excesso, as variáveis artificiais alteram a natureza da f.o. (e das restrições técnicas): as variáveis artificiais u_i figuram na f.o. associadas a um coeficiente M que representa um número positivo elevado (de modo que, ao maximizar Z, as variáveis artificiais u_i se anulem e seja garantido que elas são nulas no ponto óptimo). O problema na forma normal e o inicial apenas são equivalentes se todas as variáveis artificiais forem nulas. As variáveis de folga, de excesso e artificiais dizem-se as **variaveis auxiliares** do problema, por oposição às variáveis de decisão que são as principais.

Example 8 *No problema de PL*

$$MAX \quad Z = x_1 + x_2 + 4x_3 \quad s.a. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 13 \\ 5x_1 - x_2 - 2x_3 \leq -2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 60 \\ \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases},$$

efectuamos a multiplicação da restrição técnica R_2 por -1,

$$MAX \quad Z = x_1 + x_2 + 4x_3 \quad s.a. \quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 \leq 13 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 \geq 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 60 \\ \\ x_1, x_2, x_3 \geq 0 \end{cases}.$$

De seguida, consideramos as variáveis de folga e de excesso s_1 e t_2, respecti-

---

de produção. De facto, se tomarmos $x_1 = x_2 = \cdots = x_n = 0$ sem considerar as variáveis artificiais, obteríamos nas restrições técnicas de tipo "$\geq$"

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 - t_i = b_i \Leftrightarrow -t_i = b_i,$$

o que implicaria $t_i \leq 0$ (visto que $b_i \geq 0$). Do mesmo modo, numa restrição técnica do tipo "$=$", obteríamos

$$a_{i1} \cdot 0 + a_{i2} \cdot 0 + \cdots + a_{in} \cdot 0 = b_i \Leftrightarrow 0 = b_i,$$

o que não é necessariamente verdade.

vamente,

$$MAX \quad Z = x_1 + x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0t_2 \quad s.a. \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + s_1 + 0t_2 = 13 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 + 0s_1 - t_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0t_2 = 60 \\ \\ x_1, x_2, x_3, s_1, t_2 \geq 0 \end{cases}$$

e, por fim, as variáveis artificiais u_2 *e* u_3

$$\begin{aligned} MAX \quad Z &= x_1 + x_2 + 4x_3 + 0s_1 + 0t_2 - Mu_2 - Mu_3 \\ s.a. &\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + s_1 + 0t_2 + 0u_2 + 0u_3 = 13 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 + 0s_1 - t_2 + u_2 + 0u_3 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 0s_1 + 0t_2 + 0u_2 + u_3 = 60 \\ \\ x_1, x_2, x_3, s_1, t_2, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

O método do Simplex conta com o conceito de **solução básica admissível** (ou **viável**) (**SBA**) não-negativa. Sendo N o número de variáveis na forma normal (e m o número de restrições técnicas), o sistema constituido pelas restrições técnicas é indeterminado: tem N variáveis e apenas $m < N$ equações. Uma SBA é um vector de valores das variáveis (todas) que satisfaz todas as restrições (incluindo as de sinal) do problema e que tem no máximo $N-m$ coordenadas nulas. A cada SBA do Método do Simplex está associado um dos pontos extremo de S.

Voltemos ao Problema 5

$$MAX \quad Z = 6 \cdot x_A + 8 \cdot x_B \quad \text{s.a.} \begin{cases} 30 \cdot x_A + 20 \cdot x_B \leq 300 \\ 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B \leq 110 \\ \\ x_A, x_B \geq 0 \end{cases} .$$

A sua forma normal é dada por

$$\begin{aligned} MAX \quad Z &= 6 \cdot x_A + 8 \cdot x_B + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \\ \text{s.a.} &\begin{cases} 30 \cdot x_A + 20 \cdot x_B + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 = 300 \\ 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 = 110 \\ \\ x_A, x_B, s_1, s_2 \geq 0 \end{cases} . \end{aligned}$$

Sendo N o número (total) de variáveis na forma normal e m o número de restrições técnicas, temos $N = 4$ e $m = 2$. O sistema constituido pelas restrições técnicas é indeterminado pois tem $N = 4$ variáveis e apenas $m = 2$ equações. Uma das SBA não-negativas é

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (0, 0, 300, 110)\,,$$

atendendo ao ponto extremo $E_1\,(0, 0)$ e ao sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} 30 \cdot 0 + 20 \cdot 0 + s_1 = 300 \\ 5 \cdot 0 + 10 \cdot 0 + s_2 = 110 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 300 \\ s_2 = 110 \end{array}\right. .$$

A partir do ponto $E_2(0, 11)$ obtemos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} 30 \cdot 0 + 20 \cdot 11 + s_1 = 300 \\ 5 \cdot 0 + 10 \cdot 11 + s_2 = 110 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 80 \\ s_2 = 0 \end{array}\right.$$

que conduz à SBA não-negativa

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (0, 11, 80, 0)\,.$$

Para $E_3(4, 9)$ obtemos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} 30 \cdot 4 + 20 \cdot 9 + s_1 = 300 \\ 5 \cdot 4 + 10 \cdot 9 + s_2 = 110 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 0 \\ s_2 = 0 \end{array}\right.$$

que conduz à SBA não-negativa

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (4, 9, 0, 0)\,.$$

Ao ponto $E_4(10, 0)$ obtemos o sistema de equações

$$\left\{\begin{array}{l} 30 \cdot 10 + 20 \cdot 0 + s_1 = 300 \\ 5 \cdot 10 + 10 \cdot 0 + s_2 = 110 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s_1 = 0 \\ s_2 = 60 \end{array}\right.$$

que conduz à SBA não-negativa

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (10, 0, 0, 60)\,.$$

Método Primal do Simplex Consideremos o caso de problemas de PL que, na forma normal, possuem variáveis de folga em todas as restrições. É o caso em que, após colocar todos os termos independentes como não-negativos, todas as restrições técnicas são de tipo "$\leq$" (não sendo portanto necessárias quaisquer variáveis artificiais). Sendo adicionadas variáveis de folga em todas as restrições técnicas, a matriz $\mathbf{A}$ tem a estrutura

$$[\,\mathbf{M} \mid \mathbf{I}_m],$$

onde $\mathbf{I}_m$ é a matriz identidade de ordem m. Tal não aconteceria se alguma das restrições técnicas fosse dada por uma igualdade ou fosse necessário subtrair alguma variável de excesso. Neste caso, a aplicação do Método do Simplex assume a forma mais simples e pode designar-se por **Método Primal do Simplex**.

O Método do Simplex inicia-se a partir de uma SBA não-negativa do problema. Tal solução é designada por **SBA inicial** e deve ter, no máximo, $N-m$ coordenadas nulas. Em geral, escolhemos como nulas as coordenadas das variáveis de decisão, em número não superior a $N-m$, e determinamos as coordenadas das restantes variáveis (neste caso, de folga) com base nas restrições técnicas,

$$(0,\ldots,0,\neq 0,\ldots,\neq 0)\,.$$

Com esta escolha, que representa ausência de produção, obtemos o valor 0 na f.o.. Ao fixar a SBA inicial, fica definido o conjunto de variáveis que inicialmente são tomadas como não-nulas, as chamadas **variáveis básicas** ("de suporte" ou de valor não-nulo). As restantes variáveis dizem-se **não-básicas** ("insignificantes" ou de valor nulo). Partindo da SBA inicial, o algoritmo do Simplex vai, sucessivamente, localizando outras SBA (sempre admissíveis) às quais correspondem melhores valores da f.o. f, tendo em conta o objectivo de optimização.

Seja $\mathbf{X}_b$ a matriz coluna das variáveis básicas. Ou seja, atendendo à escolha efectuada para SBA inicial, excluímos de $\mathbf{X}_b$ as variáveis a que correspondem as coordenadas nulas em $\mathbf{X}$. Para um **problema MAX**(f) o Método do Simplex o quadro inicial é

	$\mathbf{X}^T$	
$\mathbf{X}_b$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
	$\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$	$\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$

onde $\mathbf{C}_b$ é a matriz coluna dos coeficientes na f.o. f das variáveis que constam em $\mathbf{X}_b$ (portanto, das variáveis básicas)[4]. As primeiras linhas caracterizam as m restrições enquanto a última linha caracteriza a f.o. escrita nas variáveis não-básicas.

Remark 9 *Convém não esquecer que perante um problema **MIN**(f) podemos sempre considerar a multiplicação da f.o. por -1 (i.e., considerar $-f$ em vez de f), mantendo as restrições inalteradas, e obter um problema **MAX**$(-f)$ que lhe é equivalente. Os dois problemas têm o mesmo ponto óptimo embora valores óptimos simétricos: o algoritmo aplicado ao problema **MAX**$(-f)$ fornece o ponto óptimo do problema **MIN**(f) e o valor óptimo do problema **MIN**(f) é o simétrico do obtido para o pro-blema **MAX**$(-f)$.*

Continuemos com o problema 5, dado na forma normal por

$$\begin{array}{rcl} MAX\ \ Z & = & 6 \cdot x_A + 8 \cdot x_B + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 \\ & \text{s.a.} & \left\{ \begin{array}{l} 30 \cdot x_A + 20 \cdot x_B + 1 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 = 300 \\ 5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B + 0 \cdot s_1 + 1 \cdot s_2 = 110 \\ \\ x_A, x_B, s_1, s_2 \geq 0 \end{array} \right. \end{array} .$$

Temos então as matrizes

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 6 \\ 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{bmatrix} x_A \\ x_B \\ s_1 \\ s_2 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 30 & 20 & 1 & 0 \\ 5 & 10 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 300 \\ 110 \end{bmatrix}.$$

A escolha da SBA inicial não-negativa deverá ser

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (0, 0, 300, 110),$$

[4]Para **problemas MIN** é usado o quadro inicial

	$\mathbf{X}^T$	
$\mathbf{X}_b$	$\mathbf{A}$	$\mathbf{B}$
	$\mathbf{C}^T - \mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A}$	$-\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$

(que difere do anterior pela multiplicação da última linha por -1).

a que corresponde o valor da f.o. $Z = 0$. A esta escolha de SBA inicial correspondem as variáveis básicas s_1 e s_2 e as variáveis não-básicas x_A e x_B. O quadro inicial deste problema é

	x_A	x_B	s_1	s_2	
s_1	30	20	1	0	300
s_2	5	10	0	1	110
	-6	-8	0	0	0

.

De facto, com

$$\mathbf{X}_b = \begin{bmatrix} s_1 \\ s_2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{C}_b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C^T} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A}_{2\times 4} - \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}_{1\times 4} - \begin{bmatrix} 6 & 8 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & -8 & 0 & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

e

$$\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \mathbf{B}_{2\times 1} = [0]_{1\times 1}\,.$$

O algoritmo do Simplex prossegue com a obtenção de uma nova SBA não-negativa a partir da tomada inicialmente. Este algoritmo vai percorrendo uma sequência de soluções básicas admissíveis (e por conseguinte uma sequência de quadros), cada uma "melhor" do que a anterior (no sentido da optimização pretendida), até encontrar aquela em que a f.o. toma o valor óptimo. A SBA a que corresponde o valor óptimo diz-se a **SBA óptima**. Podemos, resumidamente, dizer que o Método do Simplex parte de uma SBA inicial não-óptima até encontrar uma SBA óptima. Entre as coordenadas da SBA óptima estão as coordenadas do **ponto óptimo** (apenas com as coordenadas das variáveis de decisão).

Consideramos que temos a SBA óptima quando o quadro respectivo não tem elementos negativos na última linha (excluindo o elemento da última coluna). Portanto, o algoritmo termina quando não existirem elementos negativos na linha que evolui a partir de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$ do quadro inicial (excluindo o elemento da última coluna). Se na SBA óptima alguma das variáveis básicas for igual a 0 então a SBA óptima diz-se **degenerada**.

É a partir do quadro inicial (relativo à SBA inicial) que determinamos a nova SBA, em que uma das variáveis não-básicas da SBA inicial deixa de o ser ("entra" como básica) (e dá lugar a uma nova variável não-básica que é variável básica na SBA inicial). Para determinar qual das variáveis não-básicas passa a variável básica, é fundamental o conceito de **coluna pivot**. Para problemas MAX(f) identificamos no quadro inicial o número negativo de maior valor absoluto da última linha (obtida por $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$) que não pertença à última coluna (i.e.„ excluindo o elemento $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$). A coluna a que pertence esse número diz-se a coluna *pivot* (caso não existisse uma tal coluna, significava que a SBA inicial era a SBA óptima e terminava o algoritmo). É a variável (de entre as variáveis não-básicas) correspondente a essa coluna que passa a variável básica. Deste modo, passa a variável básica aquela que provoca um maior aumento na f.o..

Quando uma variável não-básica passa a variável básica terá, por sua vez, de deixar de ser básica ("sair" de básica) uma das variáveis básicas da SBA inicial, que ela vai substituir. Para determinar qual das variáveis básicas passa a variável não-básica, é fundamental o conceito de **linha pivot**. Para problemas MAX(f), e ainda usando o quadro inicial, calculamos os rácios (quocientes) entre os elementos da última coluna (a coluna $\mathbf{B}$) e os elementos correspondentes da coluna *pivot*. É a variável (de entre as variáveis básicas) a que corresponde o menor dos rácios não-negativos determinados que deixa de ser básica. A linha correspondente a essa variável diz-se a linha *pivot*.

É designado por **elemento pivot** o número da coluna *pivot* que conduziu ao menor dos rácios não-negativos e que determinou qual a linha *pivot*. Como tal o elemento *pivot* é o elemento de intersecção das duas filas *pivot*, ou seja, é o elemento comum às filas das variáveis de "entrada" (coluna) e de "saída" (linha).

No quadro inicial relativo ao problema 5 temos s_1 ou s_2 como variáveis básicas. O elemento -8 é o número negativo de maior valor absoluto da última linha. Assim, a coluna *pivot* é a 2^a, a da variável não-básica x_B,

	x_A	$\mathbf{x}_B$	s_1	s_2	
s_1	30	**20**	1	0	300
s_2	5	**10**	0	1	110
	-6	$\mathbf{-8}$	0	0	0

.

Enquanto que se x_A passasse a variável básica, a f.o. aumentava $-(-6) = 6$ unidades de medida por cada unidade de x_A, sendo x_B a passar a variável básica a f.o. aumenta mais, $-(-8) = 8 > 6$ por cada unidade de x_B. Concluímos então que é a variável não-básica x_B que deve passar a variável básica (pois $8 > 6$).

Se x_B passa a variável básica então é necessário que uma das inicialmente variáveis básicas, s_1 ou s_2, deixe de o ser. O cálculo dos rácios

$$\text{rácio}(s_1) : \frac{300}{20} = 15 \quad \text{e} \quad \text{rácio}(s_2) : \frac{110}{\mathbf{10}} = 11$$

permite concluir que s_2 é a variável básica que deixa de o ser, por corresponder ao menor dos rácios não-negativos[5]. Por sua vez, 10 é o elemento *pivot* por estar associado ao menor dos rácios,

	x_A	$\mathbf{x}_B$	s_1	s_2	
s_1	30	**20**	1	0	300
s_2	**5**	<u>**10**</u>	**0**	**1**	**110**
	-6	$-\mathbf{8}$	0	0	0

.

As variáveis básicas são agora s_1 e x_B e há que determinar o novo quadro relativo a esta nova situação.

O quadro relativo à nova situação é obtido por operações elementares **sobre linhas**: convertemos o elemento *pivot* em 1 (multiplicando a linha *pivot* pelo inverso do elemento *pivot*) e, em seguida, reduzimos a 0 todos

[5] O cálculo dos rácios, 15 e 11, permite identificar as consequências na região admissível S de x_B passar a variável básica. Analisemos as duas linhas do quadro do Simplex relativas às restrições técnicas (que determinam a região admissível S). Quanto à 1^a linha temos

$$30 \cdot x_A + 20 \cdot x_B + s_1 = 300 \Rightarrow 20 \cdot x_B + s_1 = 300 \Rightarrow s_1 = 300 - 20 \cdot x_B,$$

atendendo a que x_A continua a ser variável não-básica (logo $x_A = 0$). Como $s_1 \geq 0$, temos $300 - 20 \cdot x_B \geq 0$, ou seja, $x_B \leq 15$. Quanto à 2^a linha temos

$$5 \cdot x_A + 10 \cdot x_B + s_2 = 110 \Rightarrow 10 \cdot x_B + s_2 = 110 \Rightarrow s_2 = 110 - 10 \cdot x_B.$$

Como $s_2 \geq 0$, temos $110 - 10 \cdot x_B \geq 0$, ou seja, $x_B \leq 11$. A variável x_B vai tomar o maior valor possível que satisfaça a conjunção de condições

$$x_B \leq 15 \quad \wedge \quad x_B \leq 11,$$

ou seja, $x_B = 11 \neq 0$ (o que confirma que x_B passa a variável básica). Sendo $x_B = 11$ obtemos $s_1 = 300 - 20 \cdot 11 = 80 \neq 0$ (o que confirma que s_1 continua como variável básica). Por outro lado, se $x_B = 11$ obtemos $10 \cdot x_B + s_2 = 110$ obtemos ainda $s_2 = 110 - 10 \cdot 11 = 0$, logo é s_2 que deixa de ser variável básica.

os outros elementos da coluna *pivot* (usando a nova linha *pivot* entretanto obtida).

Para o problema 5 temos os sucessivos quadros

	x_A	$\mathbf{x}_B$	s_1	s_2	
s_1	30	**20**	1	0	300
$\mathbf{x}_B$	**1/2**	$\underline{\mathbf{1}}$	**0**	**1/10**	**11**
	-6	$-\mathbf{8}$	0	0	0

(resultado de multiplicarmos a 2^a linha por $1/10$ para converter o elemento pivot em 1),

	x_A	$\mathbf{x}_B$	s_1	s_2	
s_1	20	**0**	1	-2	80
$\mathbf{x}_B$	**1/2**	$\underline{\mathbf{1}}$	**0**	**1/10**	**11**
	-6	$-\mathbf{8}$	0	0	0

(resultado de multiplicarmos a nova 2^a linha por -20 e adicionarmos à 1^a linha) e, finalmente, o novo quadro

	x_A	$\mathbf{x}_B$	s_1	s_2	
s_1	20	**0**	1	-2	80
$\mathbf{x}_B$	**1/2**	$\underline{\mathbf{1}}$	**0**	**1/10**	**11**
	-2	**0**	0	$4/5$	88

(resultado de multiplicarmos a 2^a linha por 8 e adicionarmos à 3^a linha). Quando na coluna *pivot* todos os elementos são nulos, excepto o elemento *pivot* que é 1, temos o novo quadro. É visível na última coluna do novo quadro a nova SBA não-negativa,

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (0, 11, 80, 0)$$

(note-se que às variáveis x_A e s_2 corresponde o valor nulo por serem variáveis não-básicas neste quadro). A f.o. é definida pela equação $Z - 2 \cdot x_A + (4/5) \cdot s_2 = 88$. Temos então

$$Z = 2 \cdot x_A - \frac{4}{5} \cdot s_2 + 88,$$

o que mostra que a f.o. continua escrita em função das variáveis não-básicas x_A e s_2. Tal é consequência de serem não-nulos ($-2 \neq 0$ e $4/5 \neq 0$) os elementos da última linha relativos às variáveis não-básicas.

O algoritmo repete os passos anteriores enquanto subsistir um elemento negativo na última linha (excluindo o elemento da última coluna). Como tal, vão sendo encontradas as sucessivas soluções básicas admissíveis, até terminar na SBA óptima. No quadro correspondente às novas variáveis básicas s_1 e x_B,

	x_A	x_B	s_1	s_2	
s_1	20	0	1	-2	80
x_B	1/2	1	0	1/10	11
	-2	0	0	4/5	88

,

identificamos a coluna *pivot*, a coluna relativa a x_A dada a presença do único elemento negativo -2. Se x_A passar a variável básica, a f.o. aumenta $-(-2) = 2$ unidades de medida por cada unidade de x_A, enquanto se s_2 passar a variável básica (o que seria retroceder no processo pois s_2 já deixou de ser variável básica), a f.o. aumentaria menos, $-4/5 < 2$ por cada unidade de s_2. Concluímos então que a variável não-básica x_A deve passar a variável básica (pois $2 > -4/5$)[6].

Se x_A passa a variável básica então é necessário que uma das variáveis

[6]Notemos que o contributo de cada unidade de x_A na f.o. passou de 6 para 2. Justificamos este facto analisando as linhas correspondentes às duas restrições. Quanto à 1^a linha temos

$$20 \cdot x_A + s_1 - 2 \cdot s_2 = 80 \Rightarrow 20 \cdot x_A + s_1 = 80 \Rightarrow s_1 = 80 - 20 \cdot x_A,$$

atendendo a que s_2 é agora variável não-básica (logo $s_2 = 0$), pelo que um acréscimo unitário de x_A implica uma redução de 20 em s_1. Quanto à 2^a linha temos

$$\frac{1}{2} \cdot x_A + x_B + \frac{1}{10} \cdot s_2 = 11 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x_A + x_B = 11 \Rightarrow x_B = 11 - \frac{1}{2} \cdot x_A$$

pelo que um acréscimo unitário de x_A implica uma redução de $1/2$ em x_B. Assim, o facto de x_A passar a variável básica implica dois efeitos contrários na f.o.: um efeito positivo de aumento de 6 unidades por cada unidade de x_A e um efeito negativo de redução do nível da variável x_B de 4 unidades dado por

$$0 \cdot 20 + 8 \cdot \frac{1}{2} = 4.$$

Nesta soma, a 1^a parcela é a redução da f.o. provocada pela redução do nível da variável s_1 (em cada acréscimo unitário do nível de x_A) e a 2^a parcela é a redução da f.o. f provocada pela redução do nível da variável x_B (em cada acréscimo unitário do nível de x_A) (sabemos que f aumenta $-(-8) = 8$ por cada unidade de x_B). Assim, o aumento efectivo da f.o. associado a x_A é de $6 - 4 = 2$ unidades por cada unidade de x_A.

básicas s_1 ou x_B deixe de o ser. Atendendo aos rácios

$$\text{rácio}(s_1) : \frac{80}{20} = 4 \quad \text{e} \quad \text{rácio}(x_B) : \frac{11}{1/2} = 22,$$

s_1 é a variável básica que deixa de o ser[7]. Como tal 20 é o novo elemento *pivot* por corresponder ao menor dos dois rácios,

	$\mathbf{x}_A$	x_B	s_1	s_2	
$\mathbf{s}_1$	$\underline{\mathbf{20}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1}$	$\mathbf{-2}$	$\mathbf{80}$
x_B	$\mathbf{1/2}$	1	0	$1/10$	11
	$\mathbf{-2}$	0	0	$4/5$	88

.

As variáveis básicas são agora x_A e x_B e há que determinar o novo quadro relativo à nova situação. Façamos a conversão do elemento *pivot* 20 em 1,

	$\mathbf{x}_A$	x_B	s_1	s_2	
$\mathbf{x}_A$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1/20}$	$\mathbf{-1/10}$	$\mathbf{4}$
x_B	$\mathbf{1/2}$	1	0	$1/10$	11
	$\mathbf{-2}$	0	0	$4/5$	88

(multiplicando a 1^a linha por $1/20$). A redução a 0 de todos os outros ele-

[7]Notemos que, ao decidirmos que x_A passa a variável básica, é necessário avaliar as consequências produzidas na região admissível S. Como tal analisemos as duas linhas do quadro do Simplex relativas às restrições. Quanto à 1^a linha temos, ,

$$20 \cdot x_A + s_1 - 2 \cdot s_2 = 80 \Rightarrow 20 \cdot x_A + s_1 = 80 \Rightarrow s_1 = 80 - 20 \cdot x_A,$$

atendendo a que s_2 é agora variável não-básica (logo $s_2 = 0$). Como $s_1 \geq 0$, obtemos $80 - 20 \cdot x_A \geq 0$, ou seja, $x_A \leq 4$. Quanto à 2^a linha temos

$$\frac{1}{2} \cdot x_A + x_B + \frac{1}{10} \cdot s_2 = 11 \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot x_A + x_B = 11 \Rightarrow x_B = 11 - \frac{1}{2} \cdot x_A.$$

Como $x_B \geq 0$, obtemos $11 - 0.5 \cdot x_A \geq 0$, ou seja, $x_A \leq 22$. A variável x_A vai tomar o maior valor possível que satisfaça a conjunção de condições

$$x_A \leq 4 \quad \wedge \quad x_A \leq 22,$$

ou seja, $x_A = 4$ (o que confirma que x_A passa a variável básica). Se $x_A = 4$ temos $20 \cdot x_A + s_1 = 80$ obtemos $s_1 = 80 - 20 \cdot 4 = 0$, logo s_1 deixa de ser variável básica. Por outro lado, se $x_A = 4$ então $x_B = 11 - 0.5 \cdot 4 = 9 \neq 0$ (o que confirma que x_B continua como variável básica).

mentos da coluna *pivot* conduz-nos aos sucessivos quadros

	$\mathbf{x}_A$	x_B	s_1	s_2	
$\mathbf{x}_A$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1/20}$	$\mathbf{-1/10}$	$\mathbf{4}$
x_B	$\mathbf{0}$	1	$-1/40$	$3/20$	9
	$\mathbf{-2}$	0	0	$4/5$	88

(resultado de multiplicarmos a 1^a linha por $-1/2$ e adicionarmos à 2^a linha) e

	$\mathbf{x}_A$	x_B	s_1	s_2	
$\mathbf{x}_A$	$\underline{\mathbf{1}}$	$\mathbf{0}$	$\mathbf{1/20}$	$\mathbf{-1/10}$	$\mathbf{4}$
x_B	$\mathbf{0}$	1	$-1/40$	$3/20$	9
	$\mathbf{0}$	0	$1/10$	$3/5$	96

(resultado de multiplicarmos a 1^a linha por 2 e adicionarmos à 3^a linha). O algoritmo termina por não existirem elementos negativos na última linha (excluindo o elemento da última coluna), este é o quadro último do Simplex para este problema, designado por **quadro óptimo.** A respectiva SBA óptima não-negativa é

$$(x_A, x_B, s_1, s_2) = (4, 9, 0, 0)$$

(note-se que às variáveis s_1 e s_2 corresponde o valor nulo por serem variáveis não-básicas neste quadro). O ponto óptimo é $(x_A, x_B) = (4, 9)$. O valor óptimo é indicado no elemento da última linha e última coluna, $Z = 96$. A f.o. é definida pela equação $Z - (1/10) \cdot s_1 + (3/5) \cdot s_2 = 96$. Temos então

$$Z = \frac{1}{10} \cdot s_1 - \frac{3}{5} \cdot s_2 + 96$$

mostrando que a f.o. continua escrita em função das variáveis não-básicas s_1 e s_2. Tal é consequência de serem não-nulos ($1/10 \neq 0$ e $3/5 \neq 0$) os elementos da última linha relativos às variáveis não-básicas.

Remark 10 *Notemos que a matriz inicial* $\mathbf{A}$ *com estrutura* $[\ \mathbf{M} \mid \mathbf{I}_2]$ *deu lugar, no quadro último a uma matriz com estrutura* $[\ \mathbf{I}_2 \mid \mathbf{M}^{-1}]$ *(último quadro do problema). De facto, a matriz*

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} s_1 & s_2 \end{array} \\ \begin{bmatrix} 1/20 & -1/10 \\ -1/40 & 3/20 \end{bmatrix} \end{array}$$

relativa às variáveis não-básicas s_1 e s_2, é a matriz inversa da matriz quadrada

$$\begin{array}{c} \\ \mathbf{M} = \end{array} \begin{array}{c} \begin{array}{cc} x_A & x_B \end{array} \\ \left[\begin{array}{cc} 30 & 20 \\ 5 & 10 \end{array} \right] \end{array}$$

do quadro inicial relativa às variáveis x_A e x_B, que eram as não-básicas nesse quadro.

Variante do Método do Simplex: método do big-M. Quando num problema MAX existem restrições do tipo "$\geq$" e/ou do tipo "$=$" introduzimos, após considerar as variáveis de folga e de excesso necessárias, as variáveis artificiais não-negativas u_i do lado esquerdo de cada restrição técnica i que não contenha uma variável de folga. Neste caso, a aplicação do Método do Simplex segue o exposto para o Método Primal do Simplex (tanto para a construção do quadro inicial como para a evolução para os quadros seguintes) mas toma o nome de **Método do big-M** (ou **Método das Penalidades**). Na verdade, a presença de M na f.o. conduz ao seu aparecimento na última linha do quadro inicial nos elementos obtidos de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$ e de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$. Além disso, no quadro inicial não existe necessariamente uma submatriz identidade de colunas/linhas consecutivas.

Tendo sempre em conta que numa SBA devem existir no máximo $N - m$ coordenadas nulas (sendo N o número de variáveis na forma normal e m o número de restrições técnicas), escolhemos em geral a SBA inicial com:

(í) coordenadas nulas nas variáveis de decisão,

(ii) coordenada de cada variável artificial com o valor do termo independente b_i correspondente, e as

(iii) coordenadas das restantes variáveis (de folga e de excesso) determinadas com base nas restrições técnicas.

A última linha do quadro inicial é, tal como na forma primal do Simplex, obtida pelas expressões matriciais $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$ e $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$. Conforme se ilustra no exemplo seguinte, é ainda possível a última linha do quadro inicial por substituição na f.o. das expressões das variáveis básicas escritas em função das variáveis não-básicas. Estas expressões são obtidas das restrições técnicas (da forma normal).

Example 11 *No problema do Exemplo 8 temos a forma normal*

$$
\begin{aligned}
MAX \quad Z &= x_1 + x_2 + 4x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot t_2 - Mu_2 - Mu_3 \\
s.a. &\quad \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 + s_1 = 13 \\ -5x_1 + x_2 + 2x_3 - t_2 + u_2 = 2 \\ 2x_1 + 2x_2 + 3x_3 + u_3 = 60 \\ \\ x_1, x_2, x_3, s_1, t_2, u_2, u_3 \geq 0 \end{cases} ,
\end{aligned}
$$

onde $N = 7$ e $m = 3$. Dado que $N - m = 4$, consideramos a SBA inicial

$$(x_1, x_2, x_3, s_1, t_2, u_2, u_3) = (0, 0, 0, 13, 0, 2, 60),$$

onde as variáveis básicas (não-nulas) são s_1, u_2 e u_3 e as não-básicas (nulas) são x_1, x_2, x_3 e t_2. Obtemos das restrições técnicas as expressões das variáveis básicas

$$
\begin{aligned}
s_1 &= 13 - 2x_1 - x_2 + x_3 \\
u_2 &= 2 + 5x_1 - x_2 - 2x_3 + t_2 \\
u_3 &= 60 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3
\end{aligned}
$$

que, por substituição na f.o., conduzem a

$$
\begin{aligned}
Z &= x_1 + x_2 + 4x_3 + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot t_2 - Mu_2 - Mu_3 \\
&= x_1 + x_2 + 4x_3 - Mu_2 - Mu_3 \\
&= x_1 + x_2 + 4x_3 - M(2 + 5x_1 - x_2 - 2x_3 + t_2) \\
&\quad -M(60 - 2x_1 - 2x_2 - 3x_3) \\
&= (1 - 5M + 2M)\, x_1 + (1 + M + 2M)\, x_2 + (4 + 2M + 3M)\, x_3 \\
&\quad + (-M)\, t_2 + (-2M - 60M) \\
&= (1 - 3M)\, x_1 + (1 + 3M)\, x_2 + (4 + 5M)\, x_3 + (-M)\, t_2 + (-62M)
\end{aligned}
$$

(note que a f.o. está escrita em função das variáveis não-básicas). Assim, a última linha do quadro inicial (ordenado como x_1, x_2, x_3, s_1, t_2, u_2 e u_3) é constituída pelos elementos

$$
\begin{array}{ccccccc}
x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & t_2 & u_2 & u_3 \\
-(1 - 3M) & -(1 + 3M) & -(4 + 5M) & 0 & -(-M) & 0 & 0
\end{array}
$$

ou seja,

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & t_2 & u_2 & u_3 \\ 3M-1 & -1-3M & -4-5M & 0 & M & 0 & 0 \end{array}$$

correspondentes a $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$, *e ainda o elemento* $-62M$ *correspondente a* $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$.

Há ainda um modo alternativo de apresentar o método do big-M com uso de duas linhas relativas à f.o., que é designado por **método das duas fases**[8].

[8]Podemos ainda optar por decompor a última linha do quadro inicial em duas linhas: a 1^a com os coeficientes de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$ e de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$ que não contêm M e a 2^a com os coeficientes de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{A} - \mathbf{C}^T$ e de $\mathbf{C}_b^T \cdot \mathbf{B}$ que contêm M e com os restantes termos a 0.

Example 12 *Optando pelo Método das Duas Fases na resolução do problema do Exemplo 8, a última linha do quadro inicial (ordenado como* x_1, x_2, x_3, s_1, t_2, u_2 *e* u_3*)*

$$\begin{array}{ccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & t_2 & u_2 & u_3 \\ 3M-1 & -1-3M & -4-5M & 0 & M & 0 & 0 \end{array}$$

é decomposta nas duas linhas

$$\begin{array}{ccccccccccc} x_1 & x_2 & x_3 & s_1 & t_2 & u_2 & u_3 & & & \\ -1 & -1 & -4 & 0 & 0 & 0 & 0 & | & 0 & \textit{(sem } M\textit{)} \\ 3 & -3 & -5 & 0 & 1 & 0 & 0 & | & -62 & \textit{(com } M\textit{).} \end{array}$$

Pelo Método das Duas Fases, o algoritmo do Simplex desenvolve-se através de:

- **1^a fase do método:** em que se aplica o algoritmo do Simplex à última linha do quadro, até que ela não possua elementos negativos. Em condições normais a última linha do último quadro é constituída por zeros, excepto nas colunas das variáveis artificiais onde é 1.
- **2^a fase do método**: em que se elimina do último quadro da 1^a fase as colunas das variáveis artificiais u_i assim como a última linha e se continua a aplicar o algoritmo do Simplex até se cumprir a condição de paragem.

Se alguma das variáveis artificiais permanecer como básica no final desta 1^a fase então o problema é **impossível**.