Universidade Nova de Lisboa
Faculdade de Economia
Universidade Nova de Lisboa
Semestre de Primavera 2011/2012

Cálculo I

Caderno de exercícios Dois

*Um cheirinho de **Primitivas** e **Integrais,** para se tornarem economistas ou gestores.*

Maria Helena Almeida
Claudia Andrade
Guilherme Pereira
Ernesto Freitas
Claudia Alves

1 Primitivação

1.1 Exercícios resolvidos

1. Calcule as seguintes primitivas imediatas ou quase imediatas:

   (a) $\int 5$

   Resolução:

   $\int 5 = 5\int 1 = 5x + C$

   (b) $\int 7x^2$

   Resolução:

   $\int 7x^2 = 7\int x^2 = \frac{7}{3}x^3 + C$

   (c) $\int (x-4)^9$

   Resolução:

   $\int (x-4)^9 = \frac{1}{10}(x-4)^{10} + C$; não caia na tentação de desenvolver $(x-4)^9$ pelo binómio de Newton, a menos que queira ganhar prática deste...

   (d) $\int (2x+5)^3$

   Resolução:

   $\int (2x+5)^3 = \frac{1}{4}\frac{1}{2}(2x+5)^4 + C = \frac{1}{8}(2x+5)^4 + C$; mesmo comentário que em b)

   (e) $\int \sqrt{x}$

   Resolução:

   $\int \sqrt{x} = \int x^{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + C$

   (f) $\int \sqrt[3]{x}$

   Resolução:

   $\int \sqrt[3]{x} = \int x^{\frac{1}{3}} = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$

   (g) $\int \sqrt[4]{1-x}$

   Resolução:

   $\int \sqrt[4]{1-x} = \int (1-x)^{\frac{1}{4}} = -\frac{(1-x)^{\frac{1}{4}+1}}{\frac{1}{4}+1} = -\frac{4}{5}(1-x)^{\frac{5}{4}} + C$

   (h) $\int x^{-\frac{2}{5}}$

   Resolução:

   $\int x^{-\frac{2}{5}} = \frac{5}{3}x^{\frac{3}{5}} + C$

(i) $\int \frac{2}{x^2}$

Resolução:

$\int \frac{2}{x^2} = 2\int \frac{1}{x^2} = 2\int x^{-2} = 2\frac{x^{-2+1}}{-2+1} = 2\left(-x^{-1}\right) + C = -\frac{2}{x} + C$

(j) $\int e^x$

Resolução:

$\int e^x = e^x + C$

(k) $\int e^{kx}$ para $k \neq 0$

Resolução:

$\int e^{kx} = \frac{1}{k}e^{kx} + C$

(l) $\int 2e^{3x}$

Resolução:

$\int 2e^{3x} = 2\int e^{3x} = 2\frac{1}{3}\int 3e^{3x} = 2\frac{e^{3x}}{3} = \frac{2}{3}e^{3x} + C$

(m) $\int e^{\frac{1}{k}x}$ para $k \neq 0$

Resolução:

$\int e^{\frac{1}{k}x} = ke^{\frac{1}{k}x} + C$

(n) $\int 30^x$

Resolução:

$\int 30^x = \frac{30^x}{\ln 30} + C$; relembre $\left(\frac{30^x}{\ln 30}\right)' = \frac{1}{\ln 30}30^x \ln 30$

(o) $\int a^{2x}$

Resolução:

$\int a^{2x} = \int \frac{1}{2}2a^{2x} = \frac{1}{2}\int 2a^{2x} = \frac{1}{2}\frac{a^{2x}}{\ln a} + C$

(p) $\int \frac{1}{x}$

Resolução:

$\int \frac{1}{x} = \ln|x| + C$; relembre, $\ln|x|$ é uma função de domínio $R\backslash\{0\}$ e $(\ln|x|)' = \frac{1}{x}$

(q) $\int \frac{1}{x+3}$

Resolução:

$\int \frac{1}{x+3} = \ln|x+3| + C$

(r) $\int \frac{2x}{x^2+1}$

Resolução:

$\int \frac{2x}{x^2+1} = \ln\left|x^2+1\right| + C$; neste caso também podia ser $\ln\left(x^2+1\right)$ ...porquê?

(s) $\int \frac{1}{x \ln x}$

Resolução:

$\int \frac{1}{x \ln x} = \int \frac{\frac{1}{x}}{\ln x} = \ln|\ln x| + C$

(t) $\int \cos(5x)$

Resolução:

$\int \cos(5x) = \frac{1}{5}\sin(5x) + C$

Atenção!! Erro comum: dizer que $\int \cos(5x) = \sin(5x) + C$!! Derive e veja!

(u) $\int \sin\left(\frac{x}{7}\right)$

Resolução:

$\int \sin\left(\frac{x}{7}\right) = -\frac{\cos\left(\frac{x}{7}\right)}{\frac{1}{7}} = -7\cos\left(\frac{1}{7}x\right) + C$

(v) $\int \sin(3-4x)$

Resolução:

$\int \sin(3-4x) = \frac{1}{4}\cos(3-4x) + C$; relembre $(\cos f(x))' = (-\sin f(x))\, f'(x)$

(w) $\int e^x \sin(e^x)$

Resolução:

$\int e^x \sin(e^x) = -\cos(e^x) + C$

(x) $\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}}$

Resolução:

$\int \frac{2x}{\sqrt{1-x^4}} = \int \frac{(x^2)'}{\sqrt{1-(x^2)^2}} = \arcsin(x^2) + C$

(y) $\int \frac{8x^2}{1+4x^6}$

Resolução:

$\int \frac{8x^2}{1+4x^6} = 8\int \frac{x^2}{1+4x^6} = 8\int \frac{x^2}{1+4(x^3)^2} = 8\int \frac{x^2}{1+(2x^3)^2} = \frac{8}{6}\int \frac{6x^2}{1+(2x^3)^2} = \frac{4}{3}\arctan(2x^3) + C$; derive para se convencer....

(z) $\int \frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}}$

Resolução:

$\int \frac{3}{x\sqrt{1-\ln^2(x)}} = 3\int \frac{\frac{1}{x}}{\sqrt{1-\ln^2(x)}} = 3\arcsin(\ln x) + C$

2. Primitive as seguintes funções decompondo as expressões noutras mais simples.

   (a) $f(x) = 4x^2 + 3x - 2$

   Resolução: $\int 4x^2 + 3x - 2 = \int 4x^2 + \int 3x + \int -2 = 4\int x^2 + 3\int x - 2\int 1 = 4\frac{x^3}{3} + 3\frac{x^2}{2} - 2x + C =$
   $= \frac{4}{3}x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 2x + C$

   (b) $f(x) = (2-x)\sqrt{x}$

   Resolução: Aplicando a propriedade distributiva a $(2-x)\sqrt{x}$, chega-se a
   $\int (2-x)\sqrt{x} = \int (2x^{\frac{1}{2}} - x^{\frac{3}{2}}) = 2\int x^{\frac{1}{2}} - \int x^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}} - \frac{2}{5}x^{\frac{5}{2}} + C$

   (c) $f(x) = \frac{3x+9}{1+x^2}$

   Resolução:
   $\int \frac{3x+9}{1+x^2} = \int \frac{3x}{1+x^2} + \int \frac{9}{1+x^2} = 3\int \frac{x}{1+x^2} + 9\int \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{2}\int \frac{2x}{1+x^2} + 9\int \frac{1}{1+x^2} = \frac{3}{2}\ln\left|1+x^2\right| + 9\arctan(x) + C$

   (d) $f(x) = \frac{e^x + 5e^{2x}}{1+e^{2x}}$

   Resolução: $\int \frac{e^x+5e^{2x}}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x}{1+e^{2x}} + \int \frac{5e^{2x}}{1+e^{2x}} = \int \frac{e^x}{1+(e^x)^2} + 5\int \frac{e^{2x}}{1+e^{2x}} = \arctan(e^x) + \frac{5}{2}\int \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} =$
   $\arctan(e^x) + \frac{5}{2}\ln\left|1+e^{2x}\right| + C$

3. Utilizando o método de **primitivação por partes** calcule uma primitiva das seguintes funções:

   Relembre: A primitivação segundo este método, baseia-se na fórmula

   $P(u'v) = uv - P(uv')$

   Acredite que a única dificuldade está em perceber qual a função v que devemos escolher para derivar e qual a função u' que devemos escolher para primitivar! De resto é muito simples....se resultar!!

   (a) $f(x) = x^2e^x$

   Resolução:

   Sendo $v = x^2$ e $u' = e^x$, temos que $v' = 2x$ e $u = e^x$, donde $\int x^2e^x = e^x x^2 - \int e^x 2x = e^x x^2 - 2\int xe^x$

   Parece que temos de primitivar novamente por partes, por isso para tornar a resolução mais clara vamos mudar de notação pois as funções com que vamos trabalhar não são as mesmas.

   Vamos admitir agora que $P(fg') = fg - P(f'g)$

   Sendo $f = x$ e $g' = e^x$, temos que $f' = 1$ e $g = e^x$, logo, retomando:

   $e^x x^2 - 2\int xe^x = e^x x^2 - 2\left[xe^x - \int e^x\right] + C = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C$

   Então, $\int x^2 e^x = e^x x^2 - 2xe^x + 2e^x + C$

(b) $f(x) = e^x \sin x$

Resolução:

Sendo $v = \sin x$ e $u' = e^x$, temos que $v' = \cos x$ e $u = e^x$: $\int(e^x \sin x) = e^x \sin x - \int(e^x \cos x)$

Voltando a primitivar por partes e admitindo que $f = \cos x$ e $g' = e^x$, então $f' = -\sin x$ e $g = e^x$, logo:

$e^x \sin x - \int(e^x \cos x) = e^x \sin x - \left[e^x \cos x - \int e^x(-\sin x)\right] = e^x \sin x - e^x \cos x - \int(e^x \sin x)$

Como $\int(e^x \sin x) = e^x \sin x - e^x \cos x - \int(e^x \sin x)$, então

$2\int(e^x \sin x) = e^x \sin x - e^x \cos x + C \iff \int(e^x \sin x) = \frac{e^x \sin x - e^x \cos x}{2} + C$

(c) $f(x) = \sin^2 x$

Resolução:

Sendo $v = \sin x$ e $u' = \sin x$, temos que $v' = \cos x$ e $u = -\cos x$:

$\int \sin^2 x = \int \sin x \sin x = -\cos x \sin x - \int -\cos x \cos x = -\cos x \sin x + \int \cos^2 x = -\cos x \sin x + \int 1 - \sin^2 x = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x$

Assim, retomando a expressão original:

$\int \sin^2 x = -\cos x \sin x + x - \int \sin^2 x \Leftrightarrow \int \sin^2 x = \frac{x - \sin x \cos x}{2} + C$

(d) $\int f(x) = \cos^4 x$

Resolução:

Sendo $v = \cos^3 x$ e $u' = \cos x$, temos que $v' = 3\cos^2 x(-\sin x)$ e $u = \sin x$:

$\int \cos^4 x = \int \cos x. \cos^3 x = \sin x \cos^3 x - \int \sin x(3\cos^2 x(-\sin x)) =$

$= \sin x \cos^3 x + 3\int \sin^2 x \cos^2 x = \sin x \cos^3 x + 3\int(1 - \cos^2 x)\cos^2 x =$

$= \sin x \cos^3 x + 3\int \cos^2 x - 3\int \cos^4 x$

Como $\int \cos^4 x = \sin x \cos^3 x + 3\int \cos^2 x - 3\int \cos^4 x$, então: $\int \cos^4 x = \frac{\sin x. \cos^3 x}{4} + \frac{3\int \cos^2 x}{4}$

Vamos agora resolver a última primitiva, ou seja $\int \cos^2 x$, novamente por partes.

Sendo $v = \cos x$ e $u' = \cos x$, temos que $v' = -\sin x$ e $u = \sin x$:

$\int \cos^2 x = \int \cos x. \cos x = \sin x \cos x + \int \sin^2 x = \sin x \cos x + \int(1 - \cos^2 x) =$

$= \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x$

Assim, $\int \cos^2 x = \sin x \cos x + x - \int \cos^2 x \Leftrightarrow \int \cos^2 x = \frac{\sin x \cos x + x}{2} + C$

Retomando a expressão original,

$\int \cos^4 x = \frac{\sin x. \cos^3 x}{4} + \frac{3\int \cos^2 x}{4} = \frac{\sin x. \cos^3 x}{4} + \frac{3}{4}\left[\frac{\sin x \cos x + x}{2}\right] = \frac{\sin x. \cos^3 x}{4} + \frac{3}{8}\sin x \cos x + \frac{3}{8}x + C$

(e) $f(x) = x \ln x$

Resolução:

Sendo $v = \ln x$ e $u' = x$, temos que $v' = \frac{1}{x}$ e $u = \frac{x^2}{2}$: $\int x \ln x = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x^2}{2} \frac{1}{x} = \frac{x^2}{2} \ln x - \int \frac{x}{2} =$ $\frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \int x = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{1}{2} \frac{x^2}{2} = \frac{x^2}{2} \ln x - \frac{x^2}{4} + C$

(f) $f(x) = \ln^2(x)$

Resolução:

Sendo $v = \ln^2 x$ e $u' = 1$, temos que $v' = 2(\ln x)\frac{1}{x}$ e $u = x$:

$\int 1 \ln^2(x) = x \ln^2(x) - \int x \left(2 (\ln x) \frac{1}{x}\right) = x \ln^2(x) - 2 \int \ln x$

Temos que voltar a primitivar por partes para para calcular $\int \ln x$!

Sendo $f = \ln x$ e $g' = 1$, temos que $f' = \frac{1}{x}$ e $g = x$: $\int 1 \ln(x) = x \ln x - \int x \frac{1}{x} = x \ln x - x + C$

Assim, $\int 1 \ln^2(x) = x \ln^2(x) - 2 \int \ln x = x \ln^2(x) - 2 (x \ln x - x)$

(g) $f(x) = e^{2x} x^3$

Resolução:

Sendo $v = x^3$ e $u' = e^{2x}$, temos que $v' = 3x^2$ e $u = \frac{1}{2} e^{2x}$:

$\int e^{2x} x^3 = \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \int \frac{1}{2} e^{2x} 3x^2 = \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \frac{3}{2} \int e^{2x} x^2$

Teremos que voltar a repetir o processo para calcular a primita resultante!

Sendo agora $f = x^2$ e $g' = e^{2x}$, temos que $f' = 2x$ e $g = \frac{1}{2} e^{2x}$:

$\int e^{2x} x^2 = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 - \int \frac{1}{2} e^{2x} 2x = \frac{1}{2} e^{2x} x^2 - \int e^{2x} x$

Mais uma vez...

Sendo $v = x$ e $u' = e^{2x}$: $\int e^{2x} x = \frac{1}{2} e^{2x} x - \int \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{2} \frac{1}{2} e^{2x} = \frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{4} e^{2x}$

Voltando ao início,

$\int e^{2x} x^3 = \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \frac{3}{2} \int e^{2x} x^2 = \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} x^2 - \int e^{2x} x\right] = \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \frac{3}{4} e^{2x} x^2 + \frac{3}{2} \left[\frac{1}{2} e^{2x} x - \frac{1}{4} e^{2x}\right] =$
$= \frac{1}{2} e^{2x} x^3 - \frac{3}{4} e^{2x} x^2 + \frac{3}{4} e^{2x} x - \frac{3}{8} e^{2x}$

(h) $m(x) = xe^x$

Resolução:

Neste caso parece lógico escolher $f = x$ (é mais fácil derivar do que primitivar) e $g' = e^x$ (é de fácil primitivação). Experimente fazer ao contrário e sinta a dificuldade encontrada!

Retomando, sendo $f = x$, então $f' = 1$ e sendo $g' = e^x$, então $g = e^x$.

Logo, $\int xe^x = xe^x - \int 1e^x = xe^x - e^x + C$

(i) $h(x) = \ln\left(x^2+1\right)$

Resolução:

Sendo $f = \ln\left(x^2+1\right)$ e $g' = 1$, temos que $f' = \frac{2x}{x^2+1}$ e $g = x$.

$\int 1 \ln\left(x^2+1\right) = x\ln\left(x^2+1\right) - \int x\frac{2x}{x^2+1} = x\ln\left(x^2+1\right) - \int \frac{2x^2}{x^2+1} = x\ln\left(x^2+1\right) - \int 2 - \frac{2}{x^2+1} =$

$= x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\int \frac{1}{x^2+1} = x\ln\left(x^2+1\right) - 2x + 2\arctan(x) + C$

4. Recorrendo ao método de primitivação por substituição calcule uma primitiva das seguintes funções.

DICA: Este método de primitivação **pode ser** muito útil quando a expressão que queremos primitivar é antipática! Substituindo a variável x nessa expressão por uma expressão noutra variável, por exemplo t, podemos ter o trabalho muito simplificado. A técnica está em escolher a expressão $x = \varphi(t)$ que facilite e não que dificulte! Nem sempre é fácil!

Segundo este método de primitivação, sendo $x = \varphi(t)$, então $\int f(x) = \left(\int f(\varphi(t))\right)\varphi'(t)$.

Vejamos alguns exemplos:

(a) $h(x) = e^{8x}$

Resolução:

Por substituição: $x = \ln(t) \Leftrightarrow t = e^x$ e $x' = \frac{1}{t}$

$\int e^{8x} \longrightarrow \int e^{8\ln(t)}\frac{1}{t} = \int \left(e^{\ln(t)}\right)^8 \frac{1}{t} = \int t^8\frac{1}{t} = \int t^7 = \frac{t^8}{8}$

Voltando a substituir, $\frac{t^8}{8} \longrightarrow \frac{(e^x)^8}{8} = \frac{e^{8x}}{8}$, logo

$\int e^{8x} = \frac{e^{8x}}{8} + C$; note que esta primitiva é imediata mas é sempre bom observar alternativas!!

(b) $m(x) = \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}}$

Resolução:

Por substituição: $x = 3\sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$ e $x' = 3\cos(t)$

$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}} \longrightarrow \int \frac{9\sin^2(t)+3}{\sqrt{9-9\sin^2(t)}}3\cos(t) = \int \frac{9\sin^2(t)+3}{3\sqrt{1-\sin^2(t)}}3\cos(t) = \int \frac{9\sin^2(t)+3}{3\sqrt{\cos^2(t)}}3\cos(t) = \int \frac{9\sin^2(t)+3}{3\cos(t)}3\cos(t) =$

$= 3\int(3\sin^2(t)+1) = 9\int(\sin^2(t)) + 3\int 1 = 9\int(\sin^2(t)) + 3t = 9\left(\frac{t}{2} - \frac{\sin(2t)}{4}\right) + 3t =$

$= 9\left(\frac{t}{2} - \frac{2\sin(t)\cos(t)}{4}\right) + 3t = 9\left(\frac{t-\sin(t)\cos(t)}{2}\right) + 3t = \frac{9}{2}\left(t - \sin(t)\cos(t)\right) + 3t =$

$= -\frac{9}{2}\sin(t)\cos(t) + 3t + \frac{9}{2}t = -\frac{9}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{15}{2}t$

Parece que está acabado mas está em t... Ora a função inicial é em x. Voltando a substituir, $t = \arcsin\left(\frac{x}{3}\right) \Longleftrightarrow \sin(t) = \frac{x}{3}$

Sabendo que $sin^2(t) + cos^2(t) = 1$ e que $\sin(t) = \frac{x}{3}$,

$\left(\frac{x}{3}\right)^2 + cos^2(t) = 1 \Longleftrightarrow \frac{x^2}{9} + cos^2(t) = 1 \Leftrightarrow \cos(t) = \sqrt{1-\frac{x^2}{9}}$

$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{9}{2}\sin(t)\cos(t) + \frac{15}{2}t \longrightarrow \int \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{9}{2}\frac{x}{3}\sqrt{1-\frac{x^2}{9}} + \frac{15}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) =$

$= -\frac{3}{2}x\sqrt{\frac{9-x^2}{9}} + \frac{15}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) = -\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{15}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right)$

Assim,
$\int \frac{x^2+3}{\sqrt{9-x^2}} = -\frac{x}{2}\sqrt{9-x^2} + \frac{15}{2}\arcsin\left(\frac{x}{3}\right) + C$

(c) $g(x) = \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)}$

Resolução:

Por substituição: $t = \ln x \Longleftrightarrow x = e^t$
$\int \frac{\ln^4 x}{x(\ln^2 x+1)} \longrightarrow \int \frac{t^4}{e^t(t^2+1)}e^t = \int \frac{t^4}{(t^2+1)}$
Fazendo a divisão dos dois polinómios, vem que:
$\int \frac{t^4}{(t^2+1)} = \int \left(t^2 - 1 + \frac{1}{t^2+1}\right) = \int t^2 - \int 1 + \int \frac{1}{t^2+1} = \frac{t^3}{3} - t + arctg(t) + C$
Mas $t = \ln x$, logo $\int \frac{t^4}{(t^2+1)} = \frac{t^3}{3} - t + arctg(t) + C = \frac{\ln^3 x}{3} - \ln x + arctg(\ln x) + C$

(d) $j(x) = \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}$

Resolução:

Por substituição: $t = \sqrt{x} \Longleftrightarrow x = t^2$ e $x' = 2t$
$\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} \longrightarrow \int \frac{\sin t}{t}2t = 2\int \sin(t) = -2\cos(t)$
Voltando a substituir: $\int \frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = -2\cos(\sqrt{x}) + C$

(e) $c(x) = 3^{\sqrt{2x+1}}$

Resolução:

Por substituição: $t = \sqrt{2x+1} \Longleftrightarrow x = \frac{t^2-1}{2}$ e $x' = t$
$\int 3^{\sqrt{2x+1}} \longrightarrow \int 3^t t$
Primitivando por partes, em que $v = t$ e $u' = 3^t$ e, por conseguinte, $v' = 1$ e $u = \frac{3^t}{\ln(3)}$:
$\int 3^t t = \frac{3^t}{\ln(3)}t - \int \frac{3^t}{\ln(3)} = \frac{3^t}{\ln(3)}t - \frac{1}{\ln(3)}\int 3^t = \frac{3^t}{\ln(3)}t - \frac{3^t}{\ln^2(3)} + C$; parece que está feito mas não está...
Tornando a substituir: $\frac{3^t}{\ln(3)}t - \frac{3^t}{\ln^2(3)} \longrightarrow \frac{3^{\sqrt{2x+1}}\sqrt{2x+1}}{\ln(3)} - \frac{3^{\sqrt{2x+1}}}{\ln^2(3)} + C$

5. Primitive as seguintes fracções racionais:

(a) $\frac{8x^2+x+1}{x^3-x}$

Resolução:

Esta fracção racional já é própria (sorte!) por isso só temos de encontrar as raízes do denominador e decompô-la em elementos simples.

Então, $\int \frac{8x^2+x+1}{x^3-x} = \int \frac{8x^2+x+1}{x(x^2-1)} = \int \frac{8x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}$

Usando o Método dos Coeficientes Indeterminados podemos encontrar os valores de A_1, A_2 e A_3 tais que: $\int \frac{8x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = \int \frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1}$

$\frac{A_1}{x} + \frac{A_2}{x-1} + \frac{A_3}{x+1} = \frac{A_1(x-1)(x+1)+A_2x(x+1)+A_3x(x-1)}{x(x^2-1)} = \frac{8x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)}$

Assim,

$8x^2 + x + 1 = A_1(x-1)(x+1) + A_2x(x+1) + A_3x(x-1) \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow\ 8x^2 + x + 1 = A_1x^2 - A_1 + A_2x^2 + A_2x + A_3x^2 - A_3x \Longleftrightarrow$

$\Longleftrightarrow 8x^2 + x + 1 = (A_1 + A_2 + A_3)x^2 + (A_2 - A_3)x - A_1$

A solução desta igualdade é dada por um sistema de equações

$A_1 + A_2 + A_3 = 8$

$A_2 - A_3 = 1$

$-A_1 = 1$

A solução é $A_1 = -1$; $A_2 = 5$; $A_3 = 4$.

Agora é fácil!

$\int \frac{8x^2+x+1}{x^3-x} = \int \frac{8x^2+x+1}{x(x-1)(x+1)} = \int \frac{-1}{x} + \frac{5}{x-1} + \frac{4}{x+1} = -\int \frac{1}{x} + 5\int \frac{1}{x-1} + 4\int \frac{1}{x+1} =$

$= -\ln|x| + 5\ln|x-1| + 4\ln|x+1| = -\ln|x| + \ln|x-1|^5 + \ln|x+1|^4 =$

$= \ln\left|\frac{(x-1)^5(x+1)^4}{x}\right| + C$

(b) $\frac{x^3+1}{x^2-2x+10}$

Resolução:

Não sendo uma fracção racional própria, o primeiro passo é torná-la própria procedendo à divisão inteira dos dois polinómios.

Esta operação efectua-se da seguinte maneira:

	x^3			$+1$
$+$	$-x^3$	$+2x^2$	$-10x$	
	0	$+2x^2$	$-10x$	$+1$
$+$		$-2x^2$	$+4x$	-20
		0	$-6x$	-19

x^2	$-2x$	$+10$
x	$+$	2

$\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+10} = \int \left(x + 2 - \frac{6x+19}{x^2-2x+10}\right) = \frac{x^2}{2} + 2x - \int \frac{6x+19}{x^2-2x+10}$

Neste caso, a primitiva que resulta é simples, não sendo necessário proceder à decomposição do polinómio do denominador.

$\int \frac{6x+19}{x^2-2x+10} = \int \frac{3(2x-2)+25}{x^2-2x+10} = 3\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} + 25\int \frac{1}{x^2-2x+10} = 3\int \frac{2x-2}{x^2-2x+10} + 25\int \frac{1}{x^2-2x+9+1} =$
$= 3\ln\left|x^2 - 2x + 10\right| + 25\int \frac{1}{(x-1)^2+9}$

Calculando a primitiva da última parte em separado:

$\int \frac{1}{(x-1)^2+9} = \int \frac{\frac{1}{9}}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}\int \frac{\frac{1}{3}}{\left(\frac{x-1}{3}\right)^2+1} = \frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)$

Substituindo: $\int \frac{x^3+1}{x^2-2x+10} = \frac{x^2}{2} + 2x - \left[3\ln\left|x^2-2x+10\right| + 25\int \frac{1}{(x-1)^2+9}\right] =$

$= \frac{x^2}{2} + 2x - \left[3\ln\left|x^2-2x+10\right| + 25\left[\frac{1}{3}arctg\left(\frac{x-1}{3}\right)\right]\right] =$

$= \frac{x^2}{2} + 2x - 3\ln\left|x^2-2x+10\right| - \frac{25}{3}arctg\left(\frac{x-1}{3}\right) + C$

(c) $\frac{x+1}{2x^2-5x+2}$

Resolução:

Trata-se já de uma fracção racional própria, logo vamos decompor o polinómio do denominador.

$\frac{x+1}{2x^2-5x+2} = \frac{x+1}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}$

Pelo Método dos Coeficientes Indeterminados:

$\frac{x+1}{2x^2-5x+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-\frac{1}{2}}\right) = \frac{A(x-\frac{1}{2})+B(x-2)}{2(x-2)(x-\frac{1}{2})}$

Assim, $x+1 = A(x-\frac{1}{2}) + B(x-2)$, resultando $1 = A+B$ e $1 = -\frac{A}{2} - 2B \Leftrightarrow A = 2$ e $B = -1$.

Concluindo:

$\int \frac{x+1}{2x^2-5x+2} = \int \frac{1}{2}\left(\frac{2}{x-2} + \frac{-1}{x-\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left[2\int \frac{1}{x-2} - \int \frac{1}{x-\frac{1}{2}}\right] =$

$= \ln|x-2| - \frac{1}{2}\ln\left|x-\frac{1}{2}\right| + C$

1.2 Exercícios propostos

1. Calcule as seguintes primitivas imediatas ou quase imediatas:

   (a) $\int e^{2x}$

   (b) $\int \frac{1}{2x+3}$

   (c) $\int \frac{x}{x^2+1}$

   (d) $\int (ax+b)^m$

   (e) $\int \sin(7x)$

   (f) $\int \tan(2x)$ Sug: $\tan(2x) = \frac{\sin(2x)}{\cos(2x)}$

   (g) $\int x^2 \sin(x^3)$

   (h) $\int \frac{e^x}{e^x+9}$

   (i) $\int \frac{4}{x^2+1}$

   (j) $\int \frac{4}{\sqrt[3]{x}}$

   (k) $\int \frac{9e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}}$

   (l) $\int \frac{1}{x^2+6x+10}$

   (m) $\int \frac{1}{x^2+6x+12}$

2. Primitive as seguintes funções por decomposição das expressões noutras mais simples:

   (a) $\int 3x^2 - 20x - 5$

   (b) $\int e^{3x} - 5e^{2x} + 4e^x$

   (c) $\int (x-1)(x+4)$

   (d) $\int \left(\frac{1-x}{x}\right)^2$

   (e) $\int \frac{\sin(x)+\cos(x)}{\sin(x)}$

   (f) $\int \frac{2x+1}{x^2+1}$

   (g) $\int x^2(x-2)^3$

   (h) $\int \frac{x}{x^2+4x+7}$

   (i) $\int \frac{x^3-3x+4}{x}$

3. Calcule o valor das primitivas das seguintes funções através do método de primitivação por partes:

   (a) $a(x) = \ln(x)$

   (b) $b(x) = x\sin(x)$

   (c) $c(x) = \ln(1-x)$

   (d) $d(x) = x\sqrt{x+1}$

   (e) $e(x) = \frac{1}{x}\ln(x)$

4. Utilizando o método de primitivação por substituição, determine as seguintes primitivas:

   (a) $\int \frac{x+1}{\sqrt{x}}$ (Dica: faça $x = t^2$)

   (b) $\int \frac{\ln(x)}{x}$ (Dica: faça $x = e^t$)

   (c) $\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt[3]{x+1}+5}$ (Dica: faça $x+1 = t^6$)

   (d) $\int \frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x^3}+1}$ (Dica: faça $x = t^4$)

   (e) $\int e^{\sqrt{x}}$ (Dica: faça $x = t^2$)

   (f) $\int \sin\left(\sqrt[3]{x}\right)$ (Dica: faça $x = t^3$)

5. Calcule as seguintes primitivas de fracções racionais. Não esqueça que o primeiro passo é obter uma fracção própria caso não a tenha já.

   (a) $\int \frac{x^2-3x+1}{x^2+2x+1}$

   (b) $\int \frac{x^3}{x^2+1}$

   (c) $\int \frac{x^3}{x+1}$

   (d) $\int \frac{2x-1}{(x-1)(x-2)}$

   (e) $\int \frac{4x}{x^2-5x+6}$

1.3 Soluções

1. (a) $\frac{1}{2}e^{2x}+C$

   (b) $\frac{1}{2}\ln|2x+3|+C$

   (c) $\frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right)+C$

   (d) $\frac{1}{a(m+1)}(ax+b)^{m+1}+C \quad a\neq 0$ e $m\neq -1$

   (e) $-\frac{1}{7}\cos(7x)+C$

   (f) $-\frac{1}{2}\ln|\cos(2x)|+C$

   (g) $-\frac{1}{3}\cos(x^3)+C$

   (h) $\ln(9+e^x)+C$

   (i) $4\arctan(x)+C$

   (j) $6x^{\frac{2}{3}}+C$

   (k) $18e^{\sqrt{x}}+C$

   (l) $\arctan(x+3)+C$

   (m) $\frac{1}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+3}{\sqrt{3}}\right)+C$

2.

   (a) x^3-10x^2-5x+C

   (b) $\frac{1}{3}e^{3x}-\frac{5}{2}e^{2x}+4e^x+C$

   (c) $\frac{1}{3}x^3+\frac{3}{2}x^2-4x+C$

   (d) $-\frac{1}{x}+x-2\ln|x|+C$

   (e) $x+\ln|\sin(x)|+C$

   (f) $\ln\left|x^2+1\right|+\arctan(x)+C$

   (g) $\frac{x^6}{6}-\frac{6}{5}x^5+3x^4-\frac{8}{3}x^3+C$

   (h) $\frac{1}{2}\ln\left|x^2+4x+7\right|-\frac{2}{\sqrt{3}}\arctan\left(\frac{x+2}{\sqrt{3}}\right)+C$

   (i) $\frac{x^3}{3}-3x+4\ln|x|+C$

3.

(a) $x \ln x - x + C$

(b) $-x \cos(x) + \sin(x) + C$

(c) $(x-1)\ln(1-x) - x + C$

(d) $\frac{2}{3}x(x+1)^{\frac{3}{2}} - \frac{4}{15}(x+1)^{\frac{5}{2}} + C$

(e) $\frac{1}{2}\ln^2(x) + C$

4

(a) $\frac{2}{3}\sqrt{x^3} + 2\sqrt{x} + C$

(b) $\frac{\ln^2(x)}{2} + C$

(c) $\frac{6}{7}\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^7 - 6\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^5 + 50\left(\sqrt[6]{x+1}\right)^3 - 750\sqrt[6]{x+1} + \frac{3750}{\sqrt{5}}\arctan\left(\frac{\sqrt[6]{x+1}}{\sqrt{5}}\right) + C$

(d) $\frac{4}{3}\left(\sqrt[4]{x^3} - \ln\left|\sqrt[4]{x^3}+1\right|\right) + C$

(e) $2e^{\sqrt{x}}\left(\sqrt{x} - 1\right) + C$

(f) $-3\sqrt[3]{x^2}\cos(\sqrt[3]{x}) + 6\sqrt[3]{x}\sin(\sqrt[3]{x}) + 6\cos(\sqrt[3]{x}) + C$

5

(a) $x - 5\ln|x+1| - \frac{5}{x+1} + C$

(b) $\frac{x^2}{2} - \frac{1}{2}\ln\left(x^2+1\right) + C$

(c) $\frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x - \ln|x+1| + C$

(d) $\ln\left|\frac{(x-2)^3}{x-1}\right| + C$

(e) $\ln\left(\frac{(x-3)^{12}}{(x-2)^8}\right) + C$

1.4 Ficha de auto-avaliação n^{o}1:

1. Resolva as seguintes primitivas:

   (a) $\int e^{x+e^x}$

   (b) $\int \frac{x+\ln x}{x^2}$

   (c) $\int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}}$

   (d) $\int \frac{M}{r^{2,5}} dr$

   (e) $\int \frac{5x^4 \sin(x^5)}{\cos(x^5)+1}$

   (f) $\int e^x(e^x + x)$

   (g) $\int \left(x^2 - x\right) \ln(x+1)^{-1}$

   (h) $\int \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

   (i) $\int \frac{x-\sqrt{x}}{x+\sqrt{x}}$

   (j) $\int \frac{x^2}{\sqrt{16-x^6}}$

   (k) $\int \arccos x$

2. O Sr. Esquecido é o administrador de uma fábrica de queijos perto de Nisa. Ele sabe que o custo marginal de produzir x queijos é dado por

   $C'(x) = 10x + 8$ e que os custos fixos ascendem a 40. Ajude o Sr. Esquecido a calcular a função dos custos totais $C(x)$.

1.5 Ficha de auto-avaliação n^{o}2:

1. Resolva as seguintes primitivas:

   (a) $\int \frac{(e^x+1)^2}{e^x}$

   (b) $\int \frac{1}{x\sqrt{2x-3}}$

   (c) $\int \left(a + bg + cg^2 + dg^3\right) dg$ (Nota: não assuste com dg, pois serve apenas para indicar a ordem a que variável devemos primitivar a função)

   (d) $\int \frac{4x^2+x+1}{x^3-x}$

   (e) $\int x^{-1} \ln(\ln(x))$

   (f) $\int \frac{e^x}{(e^x)^2+9}$

   (g) $\int x^n \ln x$

   (h) $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}$

   (i) $\int e^{4\sin x} \cos x$

   (j) $\int \frac{x^3+1}{x^3+x^2-2x}$

2. Determine a função g tal que:

   (a) $g :]0; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e satisfaz as condições: $\forall_{x>0} \;\; g''(x) = \frac{1}{x^2} + x^3 + 2$, $g(1) = 0$ e $g'(1) = \frac{1}{4}$.

   (b) $g :]-2; +\infty[\longrightarrow \mathbb{R}$ e satisfaz as condições: $\forall_{x>-2} \;\; g''(x) = \frac{1}{2+x}$, $g(-1) = 3$ e $g'(-1) = 2$.

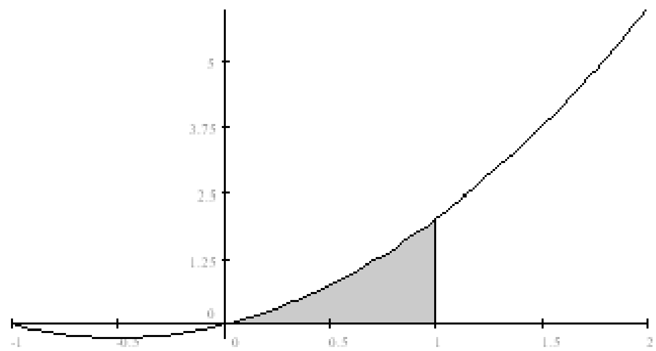
2 Integração

2.1 Exercícios resolvidos

1. Calcule o valor dos seguintes integrais definidos:

   (a) $\int_0^1 (x^2 + x)\ dx$

   Resolução:

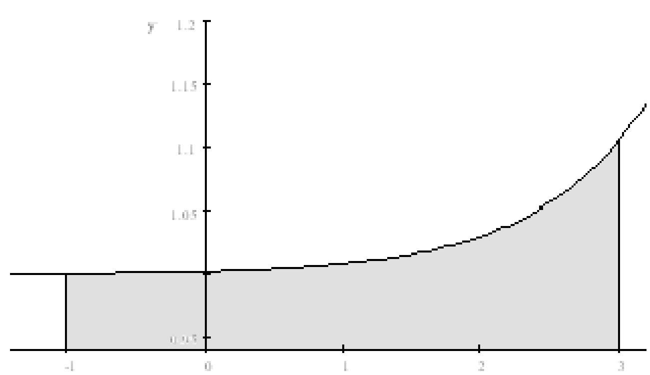


Observe-se o gráfico da função $f(x) = x^2 + x$.

O integral da função entre $[0,1]$,assinalado na figura, é dado por: $\int_0^1 (x^2 + x) = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$

   (b) $\int_{-1}^3 (e^{(x-6)} + 1)dx$

   Resolução:

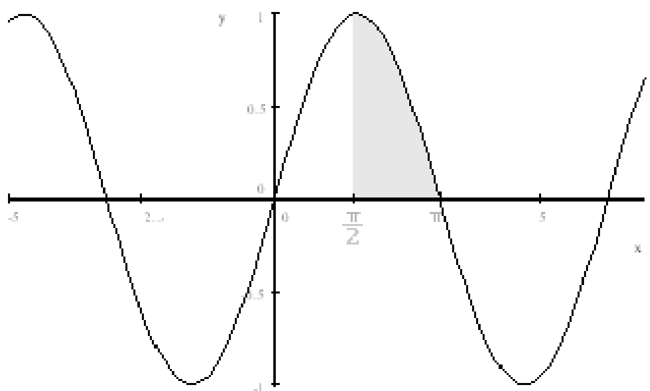


Neste caso pretende-se determinar a área entre a função $f(x) = e^{(x-6)} + 1$, o eixo dos XX, $x = -1$ e $x = 3$.

A área é dada por: $\int_{-1}^{3}(e^{(x-6)}+1)dx = \left[e^{(x-6)}+x\right]_{-1}^{3} = e^{(3-6)}+3-\left(e^{(-1-6)}-1\right) = e^{-3}-e^{-7}+4$

(c) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx$

Resolução:



Seguindo a lógica dos exemplos anteriores $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx = [-\cos x]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} = -\cos\pi + \cos\frac{\pi}{2} = 1$; neste caso, o integral corresponde à área abaixo da função $f(x) = \sin x$ no intervalo $\left[\frac{\pi}{2};\pi\right]$, que é igual a 1.

(d) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx$

Resolução: Utilizando a ideia da alínea anterior parece que $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = 1 + \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} \sin x dx = 1 + [-\cos x]_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} = \frac{1}{2}$

Cuidado! Alerta! Observe bem este exemplo enganador. Não será estranho que agora a área seja menor do que a anterior sendo o intervalo maior? Note bem que nem sempre um integral corresponde a uma área e é precisamente o que acontece neste caso. Surpreendido?

Como no intervalo $\left[\pi;\frac{4\pi}{3}\right]$ a função tem sinal negativo, para calcularmos a área teriamos de fazer: $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin x dx + \int_{\pi}^{\frac{4\pi}{3}} -\sin x dx$

Se está esquecido, relembre o que estudou nas aulas teóricas! Se quisermos calcular a área de uma função que está abaixo do eixo dos XX num certo intervalo $[a,b]$ devemos fazer $\int_{a}^{b} -f(x)dx$.

(e) $\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}dx$

Resolução:

Por substituição, $x = \sin(t) \Leftrightarrow t = \arcsin(x)$ e $x' = \cos(t)$. ATENÇÃO: quando se substitui, altera-se também o intervalo de integração.

$\int_{-1}^{1}\sqrt{1-x^2}dx \longrightarrow \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2(t)}\cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2(t)}\cos(t)dt = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2(t)dt = \left[\frac{\sin(t)\cos(t)+t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$

$\left[\frac{\sin(t)\cos(t)+t}{2}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \longrightarrow \left[\frac{x\sqrt{1-x^2}+\arcsin(x)}{2}\right]_{-1}^{1} = \frac{\sqrt{1-1}+\arcsin(1)}{2} - \frac{-1\sqrt{1-1}+\arcsin(-1)}{2} =$

$= \frac{\arcsin(1)}{2} - \frac{\arcsin(-1)}{2} = \frac{\frac{\pi}{2}}{2} - \frac{-\frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{2}$

(f) $\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx$

Resolução:

Por substituição, $x = t^2 \Leftrightarrow t = \sqrt{x}$ e $x' = 2t$

$\int_0^1 \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}dx \longrightarrow \int_0^1 \frac{1+t^2}{1+t}2tdt = 2\int_0^1 \frac{t+t^3}{1+t}dt$

Procedendo à divisão inteira dos polinómios de forma a termos uma fracção racional própria:

$2\int_0^1 \frac{t+t^3}{1+t}dt = 2\int_0^1 t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t}dt = 2\left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2} + 2t - 2\ln|t+1|\right]_0^1 =$

$= 2\left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 2 - 2\ln(2) - (-2\ln(1))\right] = \frac{11}{3} - 4\ln(2)$

(g) $\int_1^2 \frac{t^2\ln(t)-\ln(t)}{t+1}$

Resolução:

$\frac{t^2\ln(t)-\ln(t)}{t+1} = \frac{(t^2-1)\ln(t)}{t+1} = (t-1)\ln(t)$

$\int_1^2 \frac{t^2\ln(t)-\ln(t)}{t+1} = \int_1^2(t-1)\ln(t) \longrightarrow$ Teremos que integrar por partes!

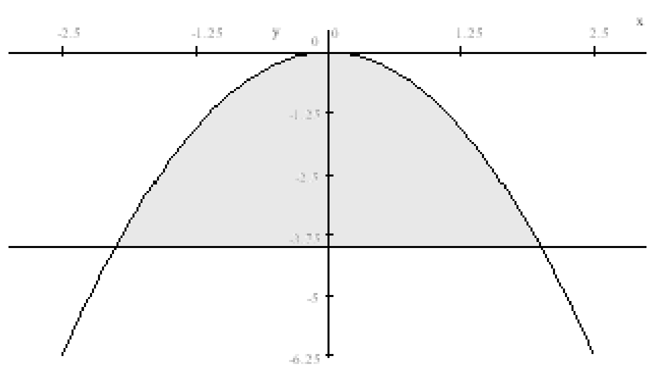
Sendo $u' = t-1$ e $v = \ln(t)$, então $u = \frac{t^2}{2} - t$ e $v' = \frac{1}{t}$:

$\int_1^2(t-1)\ln(t) = \left[\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\ln(t)\right]_1^2 - \int_1^2\left(\frac{t}{2} - 1\right)dt = \left[\left(\frac{t^2}{2} - t\right)\ln(t)\right]_1^2 - \left[\frac{t^2}{4} - t\right]_1^2 = \frac{1}{4}$

2. Calcule a área delimitada pelas curvas:

(a) $y = -x^2$, $y = -4$

Resolução:

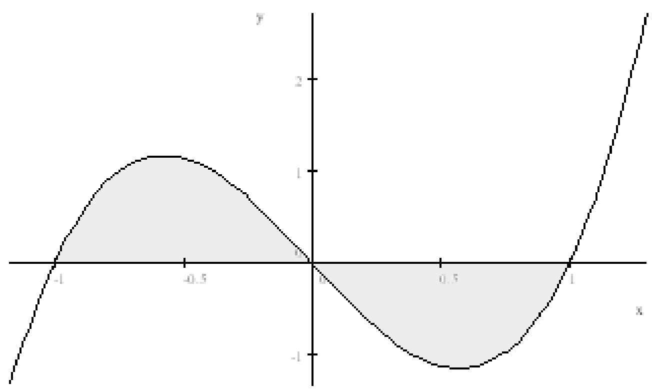


Em primeiro lugar, temos de encontrar o ponto de intersecção das duas funções. Não é difícil perceber que será em $x = -2$ e em $x = 2$.
Assim, a área será: $\int_{-2}^{2} \left(-x^2 - (-4)\right) dx = -\int_{-2}^{2} \left(x^2 - 4\right) dx = -\left[\frac{x^3}{3} - 4x\right]_{-2}^{2} = -\left[\frac{8}{3} - 8 - \left(-\frac{8}{3} + 8\right)\right] = -\frac{16}{3} + 16 = \frac{32}{3}$
Note que esta área tem de ser forçosamente igual à área delimitada pelas funções $y = x^2$, $y = 4$.
Verifique que $\int_{-2}^{2}(4 - x^2)dx = \frac{32}{3}$.

(b) $y = 3(x^3 - x)$, $y = 0$

Resolução:

Observando o gráfico percebemos que a área pretendida resulta da soma de duas áreas distintas. A primeira vai de $[-1, 0]$ e a segunda de $[0, 1]$.



A primeira região é definida por $\int_{-1}^{0} 3(x^3 - x)dx$
Quanto à segunda região, temos de ter em atenção o facto da função se encontrar abaixo do eixo dos XX, logo a área será dada por: $\int_{0}^{1} -3(x^3 - x)dx$
Assim, a área total é dada por $\int_{-1}^{0} 3(x^3 - x)dx + \int_{0}^{1} -3(x^3 - x)dx = 3\int_{-1}^{0}(x^3 - x)dx - 3\int_{0}^{1}(x^3 - x)dx = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} = \frac{3}{2}$
Perceba bem que se tivesse calculado $\int_{-1}^{1} 3(x^3 - x)dx$ iria obter uma área total igual a 0, o que não faz sentido nenhum! Uma das área estaria a anular a outra! Também pode verificar

facilmente que a função é ímpar e assim a área é $2\int_{0}^{1} -f(x)dx$.

(c) $y = 2x$, $y(x^2 + 1) = x$, $xy = 1$ e $x = 1$.

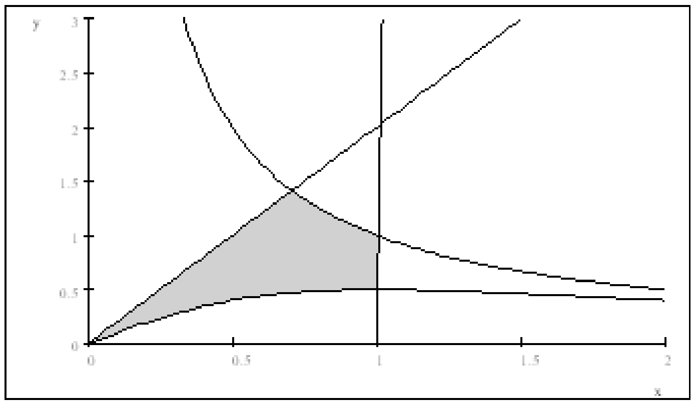
Resolução:

O primeiro passo é perceber bem quais são as funções que temos em mãos e ver graficamente qual a área delimitada.

Escrevendo de outro modo as funções apresentadas:

$y = 2x$, $y = \frac{x}{x^2+1}$, $y = \frac{1}{x}$ e $x = 1$.

Graficamente temos:



Para determinar o ponto de intersecção das funções $y = 2x$ e $y = \frac{1}{x}$,temos que resolver a seguinte equação $\frac{1}{x} = 2x \Longleftrightarrow x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$

Assim, a área pretendida será dada pelo seguinte integral definido:

$\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}(2x-\frac{x}{x^2+1})dx+\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1(\frac{1}{x}-\frac{x}{x^2+1})dx = 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}-\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}+[\ln|x|]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1-\frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 =$

$= 2\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}} + [\ln|x|]_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^1 - \frac{1}{2}\left[\ln\left|x^2+1\right|\right]_0^1 = 0,5$

3. Calcule o seguinte integral que depende de um parâmetro. Note que o valor final dependerá, naturalmente, desse parâmetro.

(a) $\int_0^1 \beta y^2 dy$

Resolução:

$\int_0^1 \beta y^2 dy = \left[\beta\frac{y^3}{3}\right]_0^1 = \frac{\beta}{3}$

(b) $\int_2^3 x^\alpha dx$

Resolução:

$\int_2^3 x^\alpha dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right]_2^3 = \left[\frac{3^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] - \left[\frac{2^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right] = \frac{3^{\alpha+1}-2^{\alpha+1}}{\alpha+1}$

(c) $\int_1^2 x^{2\alpha}\ln(x)dx$

Resolução:

Por partes, sendo $u' = x^{2\alpha}$ e $v = \ln(x)$, temos que $u = \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}$ e $v' = \frac{1}{x}$.

Assim:

$\int_1^2 x^{2\alpha}\ln(x)dx = \left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(x)\right]_1^2 - \int_1^2 \frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\frac{1}{x}dx = \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(2) - \frac{1}{2\alpha+1}\int_1^2 x^{2\alpha}dx =$
$= \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(2) - \frac{1}{2\alpha+1}\left[\frac{x^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\right]_1^2 = \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(2) - \frac{1}{2\alpha+1}\left[\frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1} - \frac{1}{2\alpha+1}\right] = \frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(2) - \frac{1}{2\alpha+1}\left[\frac{2^{2\alpha+1}-1}{2\alpha+1}\right] =$
$\frac{2^{2\alpha+1}}{2\alpha+1}\ln(2) - \frac{2^{2\alpha+1}-1}{(2\alpha+1)^2}$

4. Calcule os seguintes integrais em que um dos limites é infinito e diga se são convergentes ou divergentes:

   (a) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx$

   Resolução:

   $\int_0^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}\int_0^b \frac{1}{1+x^2}dx = \lim_{b\to+\infty}[\arctan(x)]_0^b = \lim_{b\to+\infty}[\arctan(b) - \arctan(0)] = \frac{\pi}{2} - 0 =$
   $\frac{\pi}{2}$ O limite existe, logo o integral é convergente!

   (b) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(x)dx$

   Resolução:

   $\int_{\frac{\pi}{2}}^{+\infty} \sin(x)dx = \lim_{b\to+\infty}\int_{\frac{\pi}{2}}^b \sin(x)dx$ Este limite não existe, logo o integral é divergente.

5. Calcule os seguintes integrais impróprios e diga se são convergentes ou divergentes:

   (a) $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx$

   Resolução:

   Temos de ter atenção ao ponto $x = 0$ porque a função não está definida neste ponto!
   $\int_0^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^1 \frac{2}{\sqrt{x}}dx = \lim_{\varepsilon\to0} 2\int_\varepsilon^1 \frac{1}{\sqrt{x}}dx = 2\lim_{\varepsilon\to0}\int_\varepsilon^1 x^{-\frac{1}{2}}dx = 2\lim_{\varepsilon\to0}\left[2x^{\frac{1}{2}}\right]_\varepsilon^1 =$
   $= 2[2 - 0] = 4 \longrightarrow$ *convergente*

   (b) $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2}dx$

   Resolução:

   Atenção ao ponto $x = 0$!
   $\int_{-2}^2 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\int_{-2}^{0-\varepsilon} \frac{1}{x^2}dx + \lim_{\varepsilon\to0}\int_{0+\varepsilon}^2 \frac{1}{x^2}dx = \lim_{\varepsilon\to0}\left[-\frac{1}{x}\right]_{-2}^{-\varepsilon} + \lim_{\varepsilon\to0}\left[-x^{-1}\right]_\varepsilon^2 = +\infty + \infty \longrightarrow$ é divergente!

   Dica:

   Sabemos que $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$, mas muita atenção! Se ambos os integrais do lado direito não convergem, então o integral do lado esquerdo nem sequer está definido! Perceba que a resposta correcta a esta questão não é $+\infty$!

6. Calcule as derivadas em ordem a x das funções seguintes:

(a) $\int_1^x sen(t^2)dt$

Resolução:

Calcular a derivada da primitiva é andar um passo para a frente e um passo para trás.

Em termos líquidos, ficamos no mesmo lugar, excepto quanto à variável! Temos de ter apenas atenção aos limites de integração. Nem é preciso calcular a primitiva!!!

Em geral, $\frac{d}{dx}\int_a^x f(t)dt = F'(x) = f(x)$ sendo $F(x)$ uma primitiva (que não calculamos!) de $f(x)$.

No nosso exercício: $\frac{d}{dx}\left[\int_1^x \sin(t^2)dt\right] = sen(x^2)$

A derivada de um integral indefinido em ordem ao limite superior de integração é igual à função integranda avaliada nesse limite. Porquê? Porque ao integrarmos em t, t desaparece e necessariamente a derivada é em x!

(b) $\int_x^{2\pi} \cos(t^2)dt$

Resolução:

$\frac{d}{dx}\int_x^a f(t)dt = -F'(x) = -f(x)$ sendo $F(x)$ uma primitiva de $f(x)$.

No nosso exercício: $\frac{d}{dx}\left[\int_x^{2\pi} \cos(t^2)dt\right] = -\cos(x^2)$

A derivada de um integral indefinido em ordem ao limite inferior de integração é igual ao simétrico da função integranda avaliada nesse limite.

(c) $\int_x^{2x} e^{t^2}dt$

Resolução:

Utilizando a fórmula de Barrow, $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = \frac{d}{dx}\left[F(t)\right]_{h(x)}^{g(x)} = \frac{d}{dx}\left[F(g(x)) - F(h(x))\right] = f\left[g(x)\right]g'(x) - f\left[h(x)\right]h'(x)$.

Parece termos chegado a um resultado importante: $\frac{d}{dx}\int_{h(x)}^{g(x)} f(t)dt = f\left[g(x)\right]g'(x) - f\left[h(x)\right]h'(x)$, sendo $g(x)$ uma primitiva de $g'(x)$ e $f(x)$ uma primitiva de $f'(x)$.

Aplicando a ideia ao nosso exercício: $\frac{d}{dx}\left[\int_x^{2x} e^{t^2}dt\right] = 2e^{4x^2} - e^{x^2}$

Isto não é para decorar!

7. Seja F a função definida em $[0,+\infty[$ tal que $F(x) = \int\limits_0^x \ln(2+t)dt$.

Diga, justificando, se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) i. $F(0) = \ln(2)$;

ii. $F'(0) = \frac{1}{2+x}$, para todo o $x > 0$;

iii. F é crescente em $[0,+\infty[$.

Resolução:

i. $F(0)=\int\limits_0^0 \ln(2+t)dt = [(2+t)\ln(2+t)-2-t]_0^0 = 2\ln(2)-2-2\ln(2)+2=0 \Longleftrightarrow F(0)=0 \Longrightarrow$ AFIRMAÇÃO FALSA

ii. $\int\limits_0^x \ln(2+t)dt = [(2+t)\ln(2+t)-t-2]_0^x = (2+x)\ln(2+x)-x-(2-0)\ln(2+0)+0=$
$=(2+x)\ln(2+x)-2\ln(2)-x$
$F'(x)=[(2+x)\ln(2+x)-2\ln(2)-x]' = [2\ln(2+x)+x\ln(2+x)-2\ln(2)-x]'=$
$=2\frac{1}{x+2}+\ln(2+x)+\frac{x}{x+2}-1=\frac{x+2}{x+2}+\ln(2+x)-1=\ln(2+x)$
$F'(x)=\ln(2+x)\neq\frac{1}{2+x}\Longrightarrow$AFIRMAÇÃO FALSA
Uma forma mais directa para responder à questão seria invocar o teorema que diz:
$\frac{d}{dx}\left[\int\limits_a^x f(t)dt\right]=f(x)$
Ou seja, $\frac{d}{dx}\left[\int\limits_a^x \ln(2+t)dt\right]=\ln(2+x)$

iii. $F(x)$ é tal que: $F'(x)=\ln(2+x)>0$ em $[-1,+\infty[$. Como $x\in[0,+\infty[$, $\ln(2+x)>0$, logo é verdade que F seja crescente $\Longrightarrow$ AFIRMAÇÃO VERDADEIRA

8. **Integrais duplos (!!!!!)**

Só um cheirinho! Como o nome indica, podemos calcular dois integrais simultaneamente contemplando duas variáveis de integração. Assim, tal como o integral simples corresponde, em princípio, ao cálculo de uma área, o integral duplo corresponde ao cálculo de um volume.

Um integral duplo terá o seguinte aspecto:

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)dxdy$$

Podemos calcular o integral duplo pelo cálculo sucessivo de dois integrais simples, integrando primeiro em ordem a x (mantendo y constante) e integrando depois o resultado (que é uma função de y) em ordem a y.

(a) $\int_0^1\int_0^{x^2}(x^2+y^2)dydx=\int_0^1\left[x^2y+\frac{y^3}{3}\right]_0^{x^2}dx=\int_0^1\left[x^4+\frac{x^6}{3}\right]dx=\left[\frac{x^5}{5}+\frac{x^7}{21}\right]_0^1=\frac{1}{5}+\frac{1}{21}$

2.2 Exercícios propostos

1. Calcule os seguintes integrais definidos:

   (a) $\int_0^2 \left(x^2+5x-1\right) dx$

   (b) $\int_1^2 \left(5x^3+3x^2+4\right) dx$

   (c) $\int_1^{e+1} \frac{2}{3x} dx$

   (d) $\int_{-2}^{-1} \frac{3}{y} dy$

   (e) $\int_5^8 \left(2x-3e^x\right) dx$

   (f) $\int_0^1 \frac{1}{x^2+4x+5} dx$

   (g) $\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \sin(x) dx$

   (h) $\int_1^4 2e^{\sqrt{x}} dx$

   (i) $\int_2^5 \ln(x) dx$

   (j) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} x\sin(x) dx$

   (k) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \cos(x) dx$

   (l) $\int_{-3}^{-1} 2\eta^2 d\eta$

   (m) $\int_1^{10} \ln(5x-1) dx$

   (n) $\int_4^5 \sqrt{2+x} dx$

   (o) $\int_0^1 \frac{3x}{(x^2+5)^2} dx$

   (p) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} (\sin(x)-\cos(x)) dx$

   (q) $\int_0^1 \frac{x^2+x+\sqrt{x+1}}{x+1} dx$

2. Calcule a área delimitada por:

   (a) $2x^2 \leq y \leq 2x$

   (b) $\cos(x) \leq y \leq \sin(x), \;\; 0 \leq x \leq \pi$

   (c) $y^2 = 9x, \;\; x = 2$

   (d) $-e^{-x} \leq y, \;\; y \leq e^{-x}, \;\; x \geq 0$

   (e) $y \leq \frac{1}{x}, \;\; x \geq 0$

   (f) $2y = 16 - x^2$, $x + 2y + 4 = 0$

   (g) $x = y^3, \;\; x + y = 2$, $y = 0$

   (h) $y = \sqrt{2}(x+1), \;\; y^2 = x$, $y^2 + x^2 = 2$

   (i) $(x-3)^2 + (y-2) = 1, \;\; y = x - 2, \;\; y = 0, \;\; x = 5$

3. Calcule os seguintes integrais paramétricos:

   (a) $\int_2^3 \left(\frac{2}{3t-1} + t\right) dx$
   (b) $\int_0^1 \alpha e^{\beta\tau} d\tau$
   (c) $\int_1^4 \frac{3x}{y} dx$

4. Calcule os seguintes integrais de limite infinito e diga se são convergentes ou divergentes:

   (a) $\int_{-\infty}^0 e^x dx$
   (b) $\int_0^{+\infty} 5x\sin(x)dx$
   (c) $\int_1^{+\infty} \frac{8}{x} dx$
   (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{2x^9} dx$
   (e) $\int_2^{+\infty} 3e^{-\sqrt{x}} dx$
   (f) $\int_0^{+\infty} \sin(x)dx$
   (g) $\int_1^{+\infty} (1-x)e^{-x} dx$
   (h) $\int_{-\infty}^0 xe^{-2x} dx$

5. Calcule os seguintes integrais impróprios e diga se são convergentes ou divergentes:

   (a) $\int_1^2 \frac{x-1}{\sqrt{x-1}} dx$
   (b) $\int_{\frac{1}{2}}^1 \frac{5}{\sqrt{1-x^2}} dx$
   (c) $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx$
   (d) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt[3]{x}} dx$
   (e) $\int_0^2 \frac{1}{y^3} dy$
   (f) $\int_{-1}^2 \frac{1}{x^3} dx$

6. Calcule os seguintes integrais duplos (atenção à ordem das variáveis):

   (a) $\int_{-1}^2 \int_{-2}^1 \left(x^2 + y^2\right) dydx$
   (b) $\int_0^1 \int_0^1 (xy)dxdy$

2.3 Soluções:

1.

(a) $\frac{32}{3}$

(b) $\frac{119}{4}$

(c) $\frac{2}{3}\ln|e+1|$

(d) $-3\ln(2)$

(e) $-3e^8+3e^5+39$

(f) $\arctan(3)-\arctan(2)$

(g) $\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}$

(h) $4e^2$

(i) $5\ln(5)-3-2\ln(2)$

(j) 1

(k) $\frac{1}{2}e^{\frac{1}{2}\pi}-\frac{1}{2}$

(l) $\frac{52}{3}$

(m) $\frac{98}{5}\ln(7)-9-\frac{8}{5}\ln(2)$

(n) $\frac{14}{3}\sqrt{7}-4\sqrt{6}$

(o) $\frac{1}{20}$

(p) 2

(q) $-\frac{3}{2}+2\sqrt{2}$

2.

(a) $Área=\frac{1}{3}$

(b) $Área=1+\sqrt{2}$

(c) $Área=8\sqrt{2}$

(d) $Área=2$

(e) $Área=+\infty$

(f) $Área=60,75$

(g) $Área=\frac{5}{4}$

(h) $Área=\frac{\pi}{2}+\frac{6\sqrt{2}-3}{9}-\arcsin\left(-2\frac{\sqrt{2}}{3}\right)$

(i) $Área=-2\sqrt{3}+\frac{31}{6}$

3.

(a) $\frac{2+3t^2-t}{3t-1}$

(b) $\alpha\frac{e^\beta-1}{\beta}$

(c) $\frac{45}{2y}$

4.

(a) 1 (convergente)

(b) Não existe, logo é divergente

(c) $+\infty$ (divergente)

(d) $\frac{1}{16}$ (convergente)

(e) $6e^{-\sqrt{2}}\left(\sqrt{2}+1\right)$ (convergente)

(f) Não existe, logo é divergente

(g) $-e^{-1}$ (convergente)

(h) $-\infty$ (divergente)

5.

(a) $\frac{2}{3} \longrightarrow convergente$

(b) $\frac{5\pi}{3} \longrightarrow convergente$

(c) $\frac{8}{3} \longrightarrow convergente$

(d) $\frac{3}{2} \longrightarrow convergente$

(e) $+\infty \longrightarrow divergente$

(f) $\frac{3}{8} \longrightarrow convergente$

6.

(a) 18

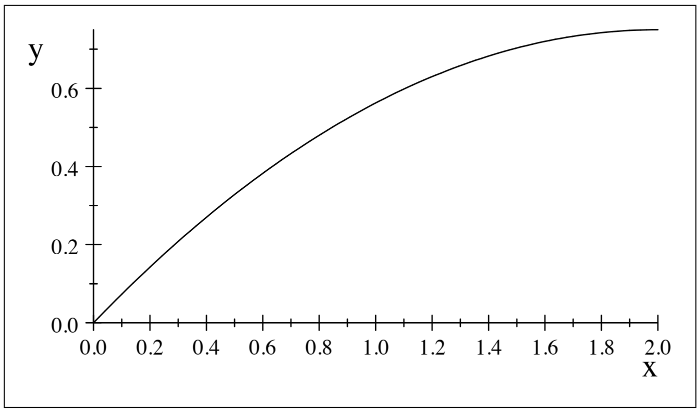
(b) $\frac{1}{4}$

2.4 Aplicação a problemas da área de Estatística, Economia e Gestão

1. Considere a variável aleatória X que tem a seguinte função de densidade $f(x) = \frac{3}{16}(4x - x^2)$, $x \in [0, 2]$.

   (a) Represente graficamente a função.

   Resolução:



   (b) Verifique que se trata de uma função densidade de probabilidade.

   Resolução:

   Trata-se de um conceito que estamos desde já a antecipar da cadeira de Estatística para Economia e Gestão!

   Para que uma dada função possa ser considerada função densidade de probabilidade tem que verificar as seguintes duas condições:

   $f(x) \geq 0$

   $\int_{x \in Df} f(x)dx = 1$, ou seja a área por debaixo do gráfico entre 0 e 2 tem de igualar 1.

   Ao trabalho!

   A verificação da primeira condição parece ser clara a partir da observação gráfica, uma vez que todos os valores da função são não negativos no intervalo em estudo.

   Quanto à segunda condição, não é nada que não consigamos fazer com os conhecimento de Cálculo I! Aqui vai...

   $\int_0^2 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{3}{16}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{3}{16}\left[8 - \frac{8}{3}\right] = 1$

   Já está! Acabámos de provar que se trata realmente de uma função densidade de probabilidade.

   (c) Calcule a função de distribuição $F(x)$.

   Dica: $F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)dx$

   Resolução:

   $F(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \int_0^x \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{3}{16}\int_0^x (4x - x^2)dx = \frac{3}{16}\left[2x^2 - \frac{x^3}{3}\right]_0^x = \frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3$

Na verdade, o que nos dará esta função? Vamos por passos...

Calculando:

$F(0) = P(X \leq 0) = \int_0^0 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)_{x=0} = 0$

$F(\frac{1}{2}) = P(X \leq \frac{1}{2}) = \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)_{x=\frac{1}{2}} = \frac{11}{128}$

$F(1) = P(X \leq 1) = \int_0^1 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)_{x=1} = \frac{5}{16}$

$F(\frac{3}{2}) = P(X \leq \frac{3}{2}) = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)_{x=\frac{3}{2}} = \frac{81}{128}$

$F(2) = P(X \leq 2) = \int_0^2 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \left(\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3\right)_{x=2} = 1$

Agora é mais fácil perceber!

$F(x)$ é uma função que nos traduz a área entre o gráfico $f(x)$ e o eixo dos XX no intervalo $[0, x]$. Por outras palavras, é a probabilidade da variável aleatória X tomar valores entre 0 e x. Quanto mais próximo de 2 for x, maior valor terá a área, logo maior será a probabilidade.

(d) Com base em $F(x)$ calcule as seguintes probabilidades:

i. $P(X \leq \frac{4}{5})$

Resolução: $P(X \leq \frac{4}{5}) = F(\frac{4}{5}) = \int_0^{\frac{4}{5}} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{26}{125}$

ii. $P(X > 1)$

Resolução: $P(X > 1) = 1 - P(X \leq 1) = 1 - F(1) = 1 - \int_0^1 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{11}{16}$ A probabilidade de x tomar valores superiores a 1 é o complementar da probabilidade de x tomar valores inferiores ou iguais a 1.

iii. $P(X \leq 5)$

Resolução: $P(X \leq 5) = F(5) = \int_0^5 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \int_0^2 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = F(2) = 1$ Se x só toma valores entre 0 e 2, é óbvio que a probalidade de x tomar valores iguais ou inferiores a 5 é 100%.

iv. $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2})$

Resolução: $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2}) = \int_1^{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{41}{128}$

Outra forma de responder à pergunta é pensar que a área entre 1 e $\frac{3}{2}$ corresponde à área situada à esquerda de $\frac{3}{2}$ subtraída da área à esquerda de 1. Assim, $P(1 \leq X \leq \frac{3}{2}) = F(\frac{3}{2}) - F(1) = \int_0^{\frac{3}{2}} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx - \int_0^1 \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = \frac{41}{128}$

(e) Determine o ponto x_1 tal que $P(X > x_1) = 0,1$.

Resolução:

Encontrar o ponto cuja área à direita é 0,1, equivale a encontrar o ponto cuja área à esquerda é 0,9, visto que a área total é invariavelmente igual a 1. Veja bem no gráfico!

Assim, $P(X > x_1) = 0,1 \Leftrightarrow P(X \leq x_1) = 0,9 \Leftrightarrow F(x_1) = 0,9 \Leftrightarrow \int_0^{x_1} \frac{3}{16}(4x - x^2)dx = 0,9$

Aproveitando o resultado da alínea c) torna-se mais simples. Assim, $\frac{3}{8}x^2 - \frac{1}{16}x^3 = 0,9$.Bastaria agora resolver esta equação e encontrariamos o valor de x_1. Não precisa de calcular visto que não é fácil baixar o grau do polinómio obtido. Fica a ideia, mas se for curioso, experimente resolver com o software Scientific Workplace!

2. O lucro de uma empresa como função da quantidade produzida x (em que $x > 0$) é:

   $f(x) = 3800 - x - \frac{2500000}{x}$

   Sabendo que a quantidade produzida varia entre 1250 e 3500 unidades, calcule o lucro médio.

   Resolução:

   O lucro médio será dado por $E(\pi) = \int g(f(x)).f(x)dx$, onde $g(f(x))$ é a função densidade de probabilidade do lucro. Supondo que a quantidade produzida se distribui uniformemente no intervalo $[1250, 3500]$,então $g(f(x)) = \frac{1}{(3500-1250)}$.Verifique que se trata realmente de uma função densidade!

   Calculando o integral definido:

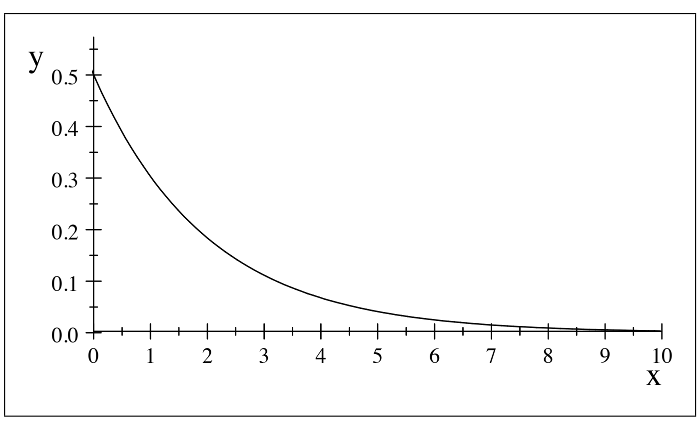
   $\frac{1}{(3500-1250)} \int_{1250}^{3500} f(x)dx = \frac{1}{2250} \int_{1250}^{3500} \left(3800 - x - \frac{2500000}{x}\right) dx =$
   $= 1425 - \frac{10\,000}{9} \ln(2) + \frac{10\,000}{9} \ln(5) - \frac{10\,000}{9} \ln(7) = 1425 - \frac{10\,000}{9} [\ln(2) - \ln(5) + \ln(7)]$

3. Em Estatística, a distribuição exponencial é definida por $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$, $(x \geq 0,\ \lambda > 0)$. Mostre que a área entre a função f e o eixo dos XX no intervalo $[0, +\infty[$ é igual a 1.

   Resolução:

   Trata-se de um integral de limite infinito, nada que não consigamos resolver!

   Graficamente, para $\lambda = \frac{1}{2}$ por exemplo, temos:



   A área pretendida é dada por $\int_0^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \int_0^b \lambda e^{-\lambda x} dx = \lim\limits_{b \to +\infty} \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^b = \lim\limits_{b \to +\infty} (-e^{-\lambda b} + 1) = 1$ Provado para qualquer $\lambda > 0$.

   Note que a área é igual a 1 e $f(x) > 0$, logo trata-se de uma função densidade.

2.5 Ficha de auto-avaliação n^{o}1

1. Resolva os seguintes integrais:

   (a) $\int_2^5 (x^2 + 2x + 1)dx$

   (b) $\int_1^3 \frac{x+1}{x-1}dx$

   (c) $\int_0^{+\infty} e^{-x}dx$

   (d) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^3}dx$

   (e) $\int_{-3}^0 \frac{4x}{x^2+9}dx$

   (f) $\int_0^3 z\sqrt{1+z}dz$

   (g) $\int_0^4 \frac{1}{\sqrt{\sqrt{x}+1}}dx$

   (h) $\int_0^1 \arcsin(x)dx$

   (i) $\int_{-1}^0 \frac{3}{y^2+y-2}dy$

   (j) $\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \sin\left(\sqrt{x}\right)dx$

2. Integre $\int_2^3 x\sqrt{4-x}dx$ por dois métodos distintos:

   (a) Por partes.

   (b) Por substituição.

3. Calcule as áreas definidas por:

   (a) $x^2 \leq y \leq \frac{1}{x}$, $x \geq 0$, $y \leq 2$

   (b) $0 \leq y \leq x^2$, $2 \leq x \leq 4$

   (c) $y \leq \frac{1}{x}$, $0 \leq y \leq x$, $x \leq 4$

4. Esboce o gráfico de cada uma das seguintes funções e sombreie a região cuja área é representada pelos integrais:

   (a) $\int_0^4 \left[(x+1) - \frac{x}{2}\right]dx$

   (b) $\int_{-1}^1 \left[\left(1-x^2\right)\left(x^2-1\right)\right]dx$

5. Mostre que $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x^a}dx = \frac{1}{a-1}$ se e só se $a > 1$ e que para $a \leq 1$ o integral é divergente.

6. A função $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$ está definida para $x > 0$.Estude convergência de $\int_0^1 f(x)dx$ e $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ e comente os resultados encontrados.

7. Encontre o erro na resolução do seguinte integral e mostre que ele nem sequer é convergente.

   $\int_{-1}^{1} \frac{1}{x^2} dx = \left[-\frac{1}{x}\right]_{-1}^{1} = -1 - 1 = -2$

   Dica: se acha que está bem resolvido, pense um pouco e chegue à conclusão que não é possível obter um integral negativo sendo a função positiva em $\mathbb{R}$. Onde estará então o erro?

2.6 Ficha de auto-avaliação n^{o}2

1. Resolva os seguintes integrais:

   (a) $\int_1^e \ln x dx$

   (b) $\int_1^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} dx$

   (c) $\int_0^4 \pi y dy$

   (d) $\int_1^3 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$

   (e) $\int_{-2}^2 \frac{4}{x^2+9} dx$

   (f) $\int_0^{+\infty} \frac{1}{x^2+1} dx$

   (g) $\int_0^1 \frac{x+3}{\sqrt{4-x^2}} dx$

   (h) $\int_{-3}^2 \frac{1}{1+e^x} dx$

   (i) $\int_0^\pi x^2 \sin x dx$

   (j) $\int_0^1 \frac{1}{x^2-5x+6} dx$

   (k) $\int_1^4 \cos(\ln x) dx$

2. Calcule a área da região delimitada por:

   (a) $y = 2 - x^2$, $y = x$

   (b) $y = -x^2 + 2$, $y = -x$, $x = 0$, $x = 1$

   (c) $y^2 = 4x$, $y = 2x - 4$

   (d) $y = 3x^3 - x^2 - 10x$, $y = -x^2 + 2x$

   (e) $y = x^2 - 6x$, $y = 0$

   (f) $y = (x-1)^3$, $y = x - 1$

   (g) $y = \sin x$, $y = \cos(2x)$, $-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{6}$

3. Encontre pelo menos quatro funções contínuas f que satisfaçam simultaneamente as condições:

   (i) $f(0) = 0$ e $f(1) = 0$

   (ii) A área limitada por f e o eixo dos XX para $0 \leq x \leq 1$ é 1.

4. Prove que o seguinte integral converge e encontre o seu valor: $\int_0^1 \frac{\ln x}{\sqrt{x}} dx$.

5. A procura diária de farinha num supermercado, em centenas de quilos, é uma variável aleatória com função densidade de probabilidade:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{2x}{3} & , \ 0 \leq x < 1 \\ -\frac{x}{3} + 1 & , \ 1 \leq x \leq 3 \\ 0 & \text{outros valores de } x \end{cases}$$

(a) Represente a graficamente a função.

(b) Qual a probabilidade da procura exceder 200kg num dia escolhido ao acaso?

(c) Qual a probalidade de se situar entre 60kg e 150kg?

(d) Deduza a função de distribuição da procura diária de farinha.

6. Calcule $\int_2^4 \frac{\sqrt{\ln(9-x)}}{\sqrt{\ln(9-x)}+\sqrt{\ln(x+3)}} dx$.

Nota: se conseguiu resolver este exercício considere-se génio! Este problema foi formulado pelo Committee on the Prize Competition - The Mathematical Association of America.