Matemática I - 2ª Parte: Cálculo Diferencial e Integral real

Ana Rita Martins

Católica Lisbon

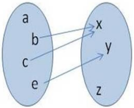
1º Semestre 2012/2013

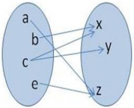
Funções

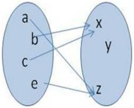
Uma função é uma correspondência f entre dois conjuntos A e B, que a cada elemento $x \in A$ faz corresponder um e um só elemento $f(x) \in B$.

- o conjunto A é chamado o **domínio** da função e é também denotado por D_f;
- o conjunto B é chamado o **conjunto de chegada** de f;
- o subconjunto $\{f(x) : x \in A\} = \{y \in B : \exists x \in A, y = f(x)\}$ é chamado o **contradomínio** da função f e denotado CD_f.

Qual das seguintes correspondências define uma função?







Uma função $f : A \to B$ diz-se:

- **injectiva** se:

$$\forall a, a' \in A(a \neq a' \Rightarrow f(a) \neq f(a'))$$

  ou de modo equivalente

$$\forall a, a' \in A(f(a) = f(a') \Rightarrow a = a')$$

- **sobrejectiva** se:

$$\forall b \in B \exists a \in A : f(a) = b,$$

  ou de modo equivalente, se $CD_f = B$,
- **bijectiva** se for simultaneamente injectiva e sobrejectiva, ou seja:

$$\forall b \in B \exists! a \in A : f(a) = b.$$

Funções reais de variável real

Quando os conjuntos A e B são ambos subconjuntos de $\mathbb{R}$ a função diz-se **função real de variável real** e usa-se a notação f.r.v.r. Neste caso, também se costuma caracterizar a função da seguinte maneira:

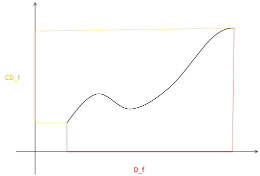
$$\begin{array}{rccc} f: & D_f \subset \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f(x), \end{array}$$

ou

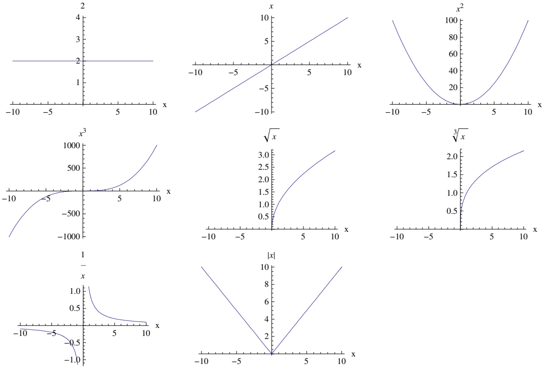
$$f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto f(x).$$

Dada uma f.r.v.r $f: D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ chama-se **gráfico de** f ao subconjunto de $\mathbb{R}^2$:

$$G_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = f(x)\}.$$



Exemplos de f.r.v.r



Operações algébricas com f.r.v.r.

Dadas f.r.v.r. $f : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, podemos definir as seguintes operações algébricas:

- **Soma**

$$\begin{array}{rccc} f+g: & D_1 \cap D_2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (f+g)(x) := f(x) + g(x) \end{array}$$

- **Multiplicação por um escalar** $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\begin{array}{rccc} \lambda f: & D_1 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\lambda f)(x) := \lambda(f(x)) \end{array}$$

- **Diferença**

$$\begin{array}{rccc} f-g: & D_1 \cap D_2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (f-g)(x) := f(x) - g(x) \end{array}$$

Operações algébricas com f.r.v.r.

- **Produto**

$$\begin{array}{rccc} fg: & D_1 \cap D_2 & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (fg)(x) := f(x)g(x) \end{array}$$

- **Quociente**

$$\begin{array}{rccc} \frac{f}{g}: & \{x \in D_1 \cap D_2 : g(x) \neq 0\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\frac{f}{g})(x) := \frac{f(x)}{g(x)} \end{array}$$

- **Composição**

$$\begin{array}{rccc} g \circ f: & \{x \in D_1 : f(x) \in D_2\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (g \circ f)(x) := g(f(x)) \end{array}$$

CATÓLICA LISBON SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

Operações algébricas com f.r.v.r.

- **Raiz de índice n par**

$$\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{f}: & \{x \in D_1 : f(x) \geq 0\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sqrt[n]{f})(x) := \sqrt[n]{f(x)} \end{array}$$

- **Raiz de índice n ímpar**

$$\begin{array}{rccc} \sqrt[n]{f}: & D_1 & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & (\sqrt[n]{f})(x) := \sqrt[n]{f(x)} \end{array}$$

Características geométricas das f.r.v.r

Uma f.r.v.r $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se **crescente** (resp. **decrescente**) se

$$\forall x, x' \in D (x < x' \Rightarrow f(x) \leq f(x'))$$

(resp.

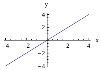
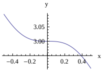
$$\forall x, x' \in D (x < x' \Rightarrow f(x) \geq f(x')).)$$

No caso das desigualdades acima serem estritas, a função diz-se estritamente crescente (resp. descrescente). Repare-se que neste caso as funções serão também injectivas.

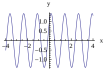
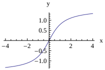
Características geométricas das f.r.v.r

Uma f.r.v.r $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ diz-se

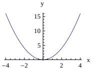
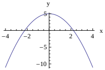
- **monótona** caso seja crescente ou descrescente;

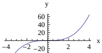
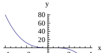
- **limitada** se existir $M > 0$ tal que $\forall x \in D, |f(x)| \leq M$;

- **par** se $\forall x \in D, f(x) = f(-x)$;

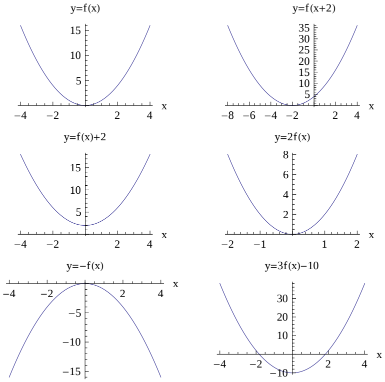



- **ímpar** se $\forall x \in D, f(-x) = -f(x)$.

Deslocando gráficos...

Como se relaciona o gráfico de uma função $f(x)$ e os gráficos de $f(x+c)$, $f(x)+c$ e $cf(x)$ ($c \in \mathbb{R}$)?



Invertibilidade

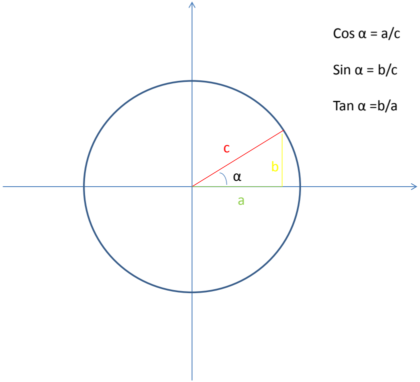
No caso de uma f.r.v.r $f : D_f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ser injectiva, tem lugar a chamada **função inversa** de f denotada por f^{-1} e que é a única função $f^{-1} : CD_f \to D_f$ satisfazendo a seguinte condição

$$(f^{-1} \circ f)(x) = x, \ (f \circ f^{-1})(y) = y, \forall x \in D_f, y \in CD_f.$$

Propriedades

- A função f será crescente (resp. descrescente) se, e somente se, f^{-1} o for;
- Um ponto (x, y) está no gráfico de f se, e somente se (y, x) está no gráfico de f^{-1}. De facto, o gráfico de f^{-1} é uma reflexão do gráfico de f relativamente à recta $y = x$;
- $D_{f^{-1}} = CD_f$ e $CD_{f^{-1}} = D_f$;
- $(f^{-1})^{-1} = f$.

Trigonometria



Cos α = a/c

Sin α = b/c

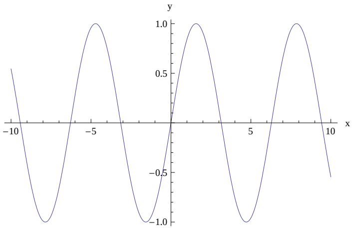
Tan α =b/a

$$\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \qquad 1 + \tan^2 x = \frac{1}{\cos^2 x}$$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x \qquad \sin(2x) = 2\sin x \cos x$$

Função Seno

$$\begin{array}{rccc} \text{Seno}: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \sin x \end{array}$$



A função Seno é uma função

- limitada: $-1 \leq \sin x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- ímpar: $\sin(-x) = -\sin x, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- periódica, de período 2π: $\sin(x + 2\pi) = \sin(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$;

Função Seno

$$\sin x = \sin\alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = -1 \Leftrightarrow x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

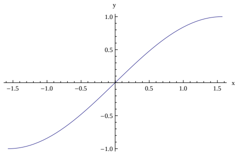
$$\sin x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = \frac{5\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = \frac{3\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\sin x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

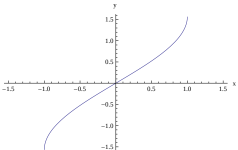
Função Arco de Seno

Considerando a restrição da função Seno ao intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$, obtemos a chamada **restrição principal do Seno**,



que é uma função estritamente crescente e, portanto, injectiva.
Podemos então considerar a sua função inversa que é designada por função **Arco de Seno**:

$$\begin{array}{rccc} \text{Arco de Seno}: & [-1,1] & \to & [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}] \\ & x & \mapsto & \arcsin x \end{array}$$



Função ArcoSeno

A função Arco de Seno pode ser definida analiticamente da seguinte maneira:

$$\forall a \in [-1,1], \arcsin(a) = \alpha \Leftrightarrow \sin\alpha = a \wedge \alpha \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}].$$

Repare-se que a função Arco de Seno continua a ser:

- uma função estritamente crescente:

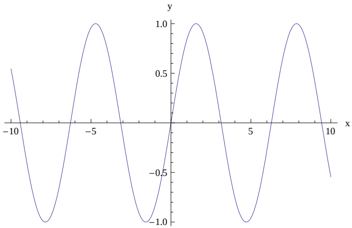
$$\forall a, b \in [-1,1], a \leq b \Leftrightarrow \arcsin(a) \leq \arcsin(b)$$

- uma função ímpar:

$$\forall a \in [-1,1], \arcsin(-a) = -\arcsin(a).$$

Função Coseno

$$\begin{array}{rccc} \text{Coseno}: & \mathbb{R} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \cos x \end{array}$$



A função Coseno é uma função:

- limitada: $-1 \leq \cos x \leq 1, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- par: $\cos(-x) = \cos x, \ \forall x \in \mathbb{R}$;
- periódica, de período 2π: $\cos(x + 2\pi) = \cos(x), \ \forall x \in \mathbb{R}$;

Função Coseno

$$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee x = -\alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 1 \Leftrightarrow x = 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = 0 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = -1 \Leftrightarrow x = (2k+1)\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

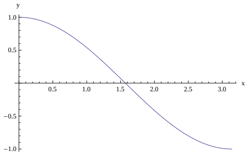
$$\cos x = \frac{1}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{3} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{4} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + 2k\pi \vee x = -\frac{\pi}{6} + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

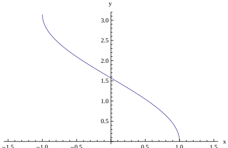
Função Arco de Coseno

Considerando a restrição da função Coseno ao intervalo $[0, \pi]$, obtemos a chamada **restrição principal do Coseno**,



que é uma função estritamente decrescente e, portanto, injectiva.
Podemos então considerar a sua função inversa que é designada por função **Arco de Coseno**:

$$\begin{array}{rccc} \text{Arco de Coseno}: & [-1, 1] & \rightarrow & [0, \pi] \\ & x & \mapsto & \arccos x \end{array}$$



Função Arco de Coseno

A função Arco de Coseno pode ser definida analiticamente da seguinte maneira:

$$\forall a \in [-1, 1], \arccos(a) = \alpha \Leftrightarrow \cos\alpha = a \wedge \alpha \in [0, \pi].$$

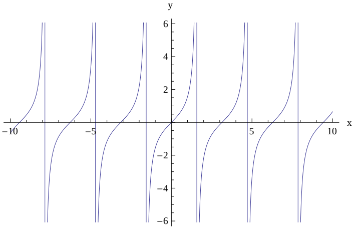
Repare-se que a função Arco de Coseno continua a ser:

- uma função estritamente decrescente:

$$\forall a, b \in [-1, 1], a \leq b \Leftrightarrow \arccos(a) \geq \arccos(b).$$

Função Tangente

$$\begin{array}{rccc} \text{Tangente}: & \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\} & \rightarrow & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \tan x \end{array}$$



A função Tangente é uma função

- ímpar: $\tan(-x) = -\tan x,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$;
- periódica, de período π:
  $\tan(x+\pi) = \tan(x),\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{\frac{\pi}{2}+2k\pi, k\in\mathbb{Z}\}$.

Função Tangente

$$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = 0 \Leftrightarrow x = k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

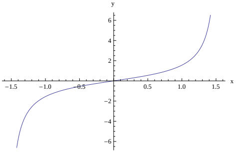
$$\tan x = -1 \Leftrightarrow x = -\frac{\pi}{4} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \sqrt{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{3} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$\tan x = \frac{\sqrt{3}}{3} \Leftrightarrow x = \frac{\pi}{6} + k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$$

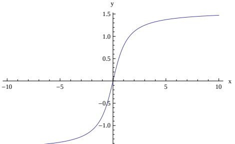
Função Arco de Tangente

Considerando a restrição da função Tangente ao intervalo $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, obtemos a chamada **restrição principal da Tangente**,



que é uma função estritamente crescente e, portanto, injectiva.
Podemos então considerar a sua função inversa que é designada por função **Arco de Tangente**:

$$\begin{array}{rccc} \text{Arco de Tangente}: & \mathbb{R} & \to &]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[\\ & x & \mapsto & \arctan x \end{array}$$



Função Arco de Tangente

A função Arco de Tangente pode ser definida analiticamente da seguinte maneira:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \arctan(a) = \alpha \Leftrightarrow \tan\alpha = a \wedge \alpha \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[.$$

Repare-se que a função Arco de Tangente é uma função estritamente crescente, isto é:

$$\forall a, b \in \mathbb{R}, a \leq b \Leftrightarrow \arctan(a) \leq \arctan(b)$$

e continua a ser uma função ímpar:

$$\forall a \in \mathbb{R}, \arctan(-a) = -\arctan(a).$$

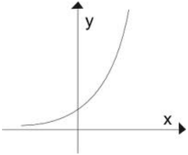
Função Exponencial

Relembremos o número de Neper

$$e = 2,718281828459045235360287471352662497757247093699 95\ldots$$

e a função exponencial (de base e)

$$\begin{array}{rccc} e^x: & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & e^x \end{array}$$



que é uma função estritamente crescente e, portanto, invertível.

Função Exponencial

Valem ainda as propriedades:

$$e^x e^y = e^{x+y},$$

$$\frac{e^x}{e^y} = e^{x-y},$$

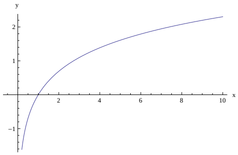
$$e^{-x} = \frac{1}{e^x},$$

$$(e^x)^y = e^{xy}.$$

Função Logaritmo

A função inversa da função exponential (de base e), chama-se função **logaritmo** e está definida por:

$$\begin{array}{cccc} \ln x: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \ln x \end{array}$$



$$\forall x > 0, \ln x = y \Leftrightarrow e^y = x,$$

$$\forall x, \ln(e^x) = x,$$

$$\forall x > 0, e^{\ln x} = x.$$

Função Logaritmo

Valem ainda as seguintes propriedades:

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y;$$

$$\ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y;$$

$$\alpha \ln x = \ln(x^\alpha).$$

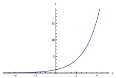
Função Exponencial de base $a > 0$

Mais geralmente, podemos considerar a função exponencial de base a, para qualquer $a > 0$:

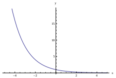
$$\begin{array}{rccc} a^x : & \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^+ \\ & x & \mapsto & a^x \end{array}$$

que continua a ser uma função invertível, mas temos dois casos a considerar:

- Se $a > 1$, a^x é uma função estritamente crescente;



- Se $a < 1$, a^x é uma função estritamente decrescente;



Em ambos os casos, vale a igualdade

$$a^x = e^{x \ln a}, \ \forall x, a \in \mathbb{R}, a > 0.$$

Função Logaritmo de base $a > 0$

A função inversa da função exponential de base a, com $a > 0$:

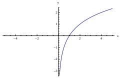
$$\begin{array}{rccc} \log_a x: & \mathbb{R}^+ & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \log_a x \end{array}$$

está definida por:

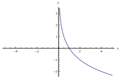
$$\forall x > 0, \log_a x = y \Leftrightarrow a^y = x$$

Além disso,

- é uma função estritamente crescente se $a > 1$;



- é uma função estritamente decrescente se $a < 1$;



- vale a igualdade

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}, \ \forall a, x > 0.$$

Noção de limite

Para falarmos em limites de f.r.v.r. temos de falar primeiro em **pontos de acumulação**!

Seja D um subconjunto não vazio da recta real. Um ponto $a \in \mathbb{R}$ chama-se **ponto de acumulação** de D se para qualquer vizinhança $V =]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ de a se tem

$$V \cap (I \backslash \{a\}) \neq \emptyset.$$

Exemplos

- 1 e 2 são pontos de acumulação dos conjuntos $[1,2]$, $]1,2[$, $[1,2[$ e $]1,2]$;
- 0 é ponto de acumulação do conjunto $]-1,0[\cup]0,1[$;
- o conjunto de todos os pontos de acumulação de $]-1,0[\cup]0,1[$ é dado pelo intervalo $[-1,1]$;
- o ponto 1 não é ponto de acumulação do conjunto $]-\infty,0]\cup\{1\}$.

Dado um ponto de acumulação a do domínio D de uma certa f.r.v.r. f podemos então analisar se existe o **limite de f quando x tende para a.**

Definição segundo Heine

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r e consideremos a um ponto de acumulação do domínio D de f. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de f no ponto a, ou de maneira equivalente, que f **tende para** b **quando** x **tende para o ponto** a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se, e somente, para qualquer sucessão de números reais $(x_n)_n$ em D convergente para a

$$x_n \to a$$

se tem

$$f(x_n) \to b.$$

Note-se que a definição segundo Heine tem especial interesse na prova da não existência de limite. Com efeito, basta encontrar **duas sucessões** $(x_n)_n$ **e** $(y_n)_n$ **em** D **convergentes para** a, tais que $f(x_n)$ **e** $f(y_n)$ **não convergem para o mesmo valor** b, para se concluir a **não existência de limite de** f **quando** x **tende para** a**.**

Definição formal

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r e consideremos a um ponto de acumulação do domínio D de f. Diz-se que $b \in \mathbb{R}$ é limite de f no ponto a, ou de maneira equivalente, que f **tende para** b **quando** x **tende para o ponto** a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se, e somente, for verificada a seguinte condição:

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D \backslash \{a\}, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

A condição quer dizer o seguinte:
sempre que fixamos uma vizinhança $]b - \delta, b + \delta[$ $(\delta > 0)$ do ponto b
existe uma vizinhança $]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$ $(\varepsilon > 0)$ do ponto a tal que
para qualquer ponto x do dominio de f pertencente a $D \cap]a - \varepsilon, a + \varepsilon[$, a sua imagem $f(x)$ pertence à vizinhança tomada de b: $f(x) \in]b - \delta, b + \delta[$.

Limites laterais

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r e consideremos o seguinte subconjunto do domínio D de f: $D^+ = \{x \in D : x > a\}$.

Se a for ponto de acumulação de D^+ pode considerar-se o **limite de f à direita no ponto** a, que se denota por $\lim_{x\to a^+} f(x)$, e que corresponde ao limite quando x tende para a da restrição $f|_{D^+}$, isto é:

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D, a < x < a + \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Limites laterais

Definição

No caso de a ser um ponto de acumulação do conjunto $D^- := \{x \in D : x < a\}$, define-se de modo análogo o **limite de** f **à esquerda no ponto** a que se denota por $\lim_{x \to a^-} f(x)$ e que corresponde ao limite quando x tende para a da restrição $f|_{D^-}$:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = b \in \mathbb{R} \Leftrightarrow$$

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D, a - \varepsilon < x < a \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Proposição

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e a um ponto que é ponto de acumulação tanto de D^+ como de D^-.

Então a função f converge para $b \in \mathbb{R}$ no ponto a se, e somente se, existem os limites laterais à esquerda e à direita do ponto a e ambos são dados por b.

Infinitésimos

Definição

Chama-se **infinitésimo no ponto** a a toda a função que tem limite nulo no ponto a.

Proposição

O produto de um infinitésimo no ponto a por uma função limitada numa vizinhança do ponto a, é ainda um infinitésimo no ponto a.

Infinitamente grandes

Definição

Diz-se que a função f tende para $+\infty$ quando x tende para o ponto a, se e somente se, for verificada a condição:

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D \backslash \{a\}, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) > \delta.$$

Definição

Diz-se que a função f tende para $-\infty$ quando x tende para o ponto a, se e somente se, for verificada a condição:

$$\forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D \backslash \{a\}, |x - a| < \varepsilon \Rightarrow f(x) < -\delta.$$

Limites quando x tende para ∞

Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r. Se D contiver um intervalo da forma $]c, +\infty[$, tem também sentido calcular o limite de f quando x tende para $+\infty$, e dado $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D, x > \varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Definição

Analogamente, se D contiver um intervalo da forma $]-\infty, c[$, tem também sentido calcular o limite de f quando x tende para $-\infty$, e dado $b \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \delta > 0 \exists \varepsilon > 0 : \forall x \in D, x < -\varepsilon \Rightarrow |f(x) - b| < \delta.$$

Notação

Dado um subconjunto limitado D de $\mathbb{R}$, denotamos por D' o conjunto dos pontos de acumulação de D. Se D contiver um intervalo da forma $]c,+\infty[$ e/ou $]-\infty,c[$ usamos a mesma notação D' para o conjunto dado pela união do conjunto dos pontos de acumulação com $\{+\infty\}$ e/ou com $\{-\infty\}$.

Portanto, D' serve para denotar o conjunto dos pontos onde faz sentido estudar a existência de limite de uma função f!

Propriedades:

1) Se existe limite de f quando x tende para $a \in D'$, então é único.
2) O limite de uma função constante em D é a própria constante em qualquer ponto $x \in D'$.
3) Se a f.r.v.r $f : D \to \mathbb{R}$ tiver limite finito quando x tende para $a \in D'$, então f é limitada numa vizinhança de a.

Proposição

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f.r.v.r, $a \in D'$ e admitamos que $\lim_{x \to a} f(x) = b$ e $\lim_{x \to a} g(x) = c$.

1) Se $b < c$, então existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in \{x \in D_f \cap D_g : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ se tem $f(x) < g(x)$;
2) Reciprocamente, se existe $\varepsilon > 0$ tal que para todo o $x \in \{x \in D_f \cap D_g : 0 < |x - a| < \varepsilon\}$ se tem $f(x) \leq g(x)$, então $b \leq c$;

Teorema do Encaixe

Sejam $f, g, h : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f.r.v.r e $a \in D'$.
Se

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

numa vizinhança do ponto a e

$$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = b,$$

então

$$\lim_{x \to a} h(x) = b.$$

Álgebra dos Limites Finitos

Proposição

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f.r.v.r e $a \in D'$. Se f e g admitem limite **finito** no ponto a então também o admitem as funções $f+g$, $f-g$ e $f \cdot g$ e tem-se:

$$\lim_{x\to a}(f+g) = (\lim_{x\to a} f) + (\lim_{x\to a} g),$$

$$\lim_{x\to a}(f-g) = (\lim_{x\to a} f) - (\lim_{x\to a} g),$$

$$\lim_{x\to a}(f \cdot g) = (\lim_{x\to a} f) \cdot (\lim_{x\to a} g).$$

Além disso, se $\lim_{x\to a} g \neq 0$, então existe o limite de $\frac{f}{g}$ no ponto a e tem-se:

$$\lim_{x\to a} \frac{f}{g} = \frac{\lim_{x\to a} f}{\lim_{x\to a} g}.$$

CATÓLICA LISBON SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

Proposição

Sejam $f : D_1 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D_2 \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $CD_f \subset D_2$ e consideremos $a \in D_1'$. Se f admite limite no ponto a e g admite limite no ponto $b = \lim_{x \to a} f$ então a função $f \circ g$ também admite limite no ponto a e tem-se:

$$\lim_{x \to a} (g \circ f)(x) = \lim_{y \to b} g(y).$$

Álgebra dos Limites

Para se enunciar de forma simples a álgebra de limites de f.r.v.r. (finitos ou infinitos) é costume considerar a chamada recta acabada:

$$\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}.$$

As operações algébricas (soma, produto, quociente, etc.) na recta acabada são definidas de modo a que a sua restrição a $\mathbb{R}$ corresponda às operações usuais.

No entanto, não é possivel determinar o resultado de todas operações em $\overline{\mathbb{R}}$ e, sempre que isto acontecer, diz-se que estamos perante uma **indeterminação**.

Álgebra dos Limites

Consideremos então um elemento $a \in \mathbb{R}$. Define-se:

Soma

$a + (\pm\infty) = \pm\infty$
$a - (\pm\infty) = \mp\infty$
$+\infty + (+\infty) = +\infty$
$-\infty + (-\infty) = -\infty$
$+\infty + (-\infty)$ ou $+\infty - (+\infty)$ é uma indeterminação do tipo $\infty - \infty$

Produto

$$a \cdot (\pm\infty) = \begin{cases} \pm\infty, \text{se } a > 0 \\ \mp\infty, \text{se } a < 0 \end{cases}$$

$0 \cdot (\pm\infty)$ é uma indeterminação do tipo $0 \cdot \infty$
$+\infty \cdot (+\infty) = +\infty$
$+\infty \cdot (-\infty) = -\infty$
$-\infty \cdot (-\infty) = +\infty$

Álgebra dos Limites

Quociente

$\frac{1}{\pm\infty} = 0$

$\frac{1}{0^{\pm}} = \pm\infty$

$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}\infty = 0 \cdot \infty$ (Ind.)

$\frac{0}{0} = 0 \cdot \frac{1}{0} = 0 \cdot (\infty)$ (Ind.)

Potenciação

Consideremos agora que $a \geq 0$

$$a^{+\infty} = \begin{cases} 0, \text{se } a < 1 \\ +\infty, \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$$a^{-\infty} = \frac{1}{a^{\infty}} = \begin{cases} +\infty, \text{se } a < 1 \\ 0, \text{se } a > 1 \end{cases}$$

$1^{\pm\infty}$ é uma indeterminação do tipo 1^{∞}

Álgebra dos Limites

Potenciação

Seja $b \in \mathbb{R}$: $(+\infty)^b = \begin{cases} +\infty, \text{se } b > 0 \\ 0, \text{se } b < 0 \end{cases}$

$(\pm\infty)^0$ é indeterminação do tipo ∞^0

$(+\infty)^{+\infty} = +\infty$

$(+\infty)^{-\infty} = \frac{1}{(+\infty)^{+\infty}} = 0$

0^0 também é indeterminação.

Lista de Indeterminações

Lista de Indeterminações

$$\infty - \infty$$

$$\frac{\infty}{\infty} = \frac{1}{\infty}\infty = 0 \cdot \infty = 0 \cdot \frac{1}{0} = \frac{0}{0}$$

$$1^{\infty}$$

$$\infty^{0}$$

$$0^{0}$$

Levantamento de Indeterminações

Tal como se viu atrás, existem operações na recta acabada que não estão definidas para todos os elementos de $\overline{\mathbb{R}}$, surgindo naturalmente as indeterminações no cálculo de limites. Felizmente, em geral, é possível "transformar"o limite dado num limite equivalente, mas cujo resultado se pode obter através de operações bem definidas em $\overline{\mathbb{R}}$, dizendo-se neste caso que se "levantou"a indeterminação.

Para tal são úteis os chamados **limites notáveis**:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x}=0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to +\infty}\frac{e^x}{x^k}=+\infty(k\in\mathbb{N})$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+ax)}{x}=a(a\in\mathbb{R})$$

$$\lim_{x\to +\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0,\ \lim_{x\to 0^+}x^\alpha\ln(x)=0,\ \alpha>0$$

Levantamento de Indeterminações

Proposição

Sejam f e g duas f.r.v.r. tais que

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a \in \mathbb{R}$$

e $\lim_{x \to \pm\infty} |g(x)| = +\infty$. Então

$$\lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{f(x)}{g(x)}\right)^{g(x)} = e^{a}.$$

Continuidade de Funções reais e de variável real

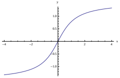
Definição

Seja $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $a \in D$. Diz-se que f é **contínua no ponto** a se

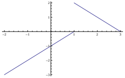
$$\lim_{x \to a} f(x) = f(a).$$

No caso de f ser contínua em todos os pontos do seu domínio, diz-se que f é uma função contínua em D.

Exemplo de uma função contínua



Exemplo de uma função descontínua



Continuidade de Funções reais e de variável real

Proposição

Sejam $f, g : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ f.r.v.r e $a \in D$. Se f e g são funções contínuas no ponto a, então também o são (no mesmo ponto) as funções $f+g, f-g$ e $f \cdot g$. Além disso, se $g(a) \neq 0$, então também a função $\frac{f}{g}$ será contínua no ponto a.

Proposição

Sejam $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g : D' \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções e $a \in D$ tal que $f(a) \in D'$. Se f for contínua no ponto a e g for contínua no ponto $f(a)$, então a função $g \circ f$ também será contínua no ponto a.

Continuidade da Função Inversa

Continuidade da Função Inversa

Se f é uma função injectiva e contínua num intervalo I de $\mathbb{R}$ então f^{-1} é contínua em $f(I)$.

Teorema de Bolzano

Sejam $a, b \in \mathbb{R}$ e f uma função contínua em $[a, b]$. Então f assume todos os valores entre $f(a)$ e $f(b)$, isto é, dado qualquer número real k compreendido entre $f(a)$ e $f(b)$ existe sempre um ponto $c \in [a, b]$ tal que $f(c) = k$.

Corolário do Teorema de Bolzano

Se f é uma função contínua em $[a, b]$ e $f(a) \cdot f(b) < 0$ então f tem, pelo menos, um zero em $]a, b[$.

Teorema de Weierstrass

Se f for uma função contínua num intervalo $[a, b]$, então a imagem de f em $[a, b]$ é também um intervalo fechado $[c, d]$, onde c (resp. d) é o valor mínimo (resp. máximo) tomado por f no intervalo $[a, b]$.

Prolongamentos por continuidade

Consideremos novamente uma f.r.v.r. f e a um ponto de acumulação do seu domínio. Se $a \notin D$, não faz sentido analisar a continuidade de f no ponto a, uma vez que este ponto não está no domínio da função. No entanto, podemos averiguar a existência de uma função contínua em D e que coincida com f em $D \setminus \{a\}$, chamando-se a uma função nestas condições o **prolongamento por continuidade de f ao ponto a**.

Por definição de continuidade e de limite, é imediato que a função f será prolongável por continuidade ao ponto a se, e somente se, existir e for finito o limite de f no ponto a, estando, nesse caso, o prolongamento contínuo de f definido univocamente pela função:

$$\begin{array}{rccc} \widetilde{f}: & D \cup \{a\} & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & \begin{cases} f(x), & x \in D \\ \lim\limits_{x \to a} f(x), & x = a. \end{cases} \end{array}$$

Noção de derivada

Definição

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $a \in I$. Dizemos que a função $f : I \to \mathbb{R}$ é **derivável** ou **diferenciável** em a se:

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \in \mathbb{R}$$

e chama-se ao limite obtido a **derivada de f no ponto** a, donotado por $f'(a)$ ou $\frac{\partial f}{\partial x}(a)$.

Note-se que fazendo $h = x - a$, podemos também escrever

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

Derivadas laterais

Chamamos **derivada à direita** (resp. à esquerda) no ponto a a:

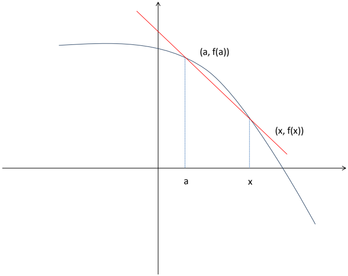
$$f_d'(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^+} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

(resp.

$$f_e'(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim_{h \to 0^-} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}).$$

Interpretação geométrica

Dado $x \in I$, $x \neq a$, o quociente $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ representa o declive da recta que passa nos pontos $(a, f(a))$ e $(x, f(x))$ do gráfico de f (recta secante ao gráfico de f).



Desta forma, f será diferenciável em a se, e somente se, o gráfico de f admitir uma recta tangente no ponto $(a, f(a))$, com declive igual a $f'(a)$. Nesse caso, a recta tangente ao gráfico de f tem equação:

$$y - f(a) = f'(a)(x - a).$$

Uma função pode admitir ambas as derivadas laterais num ponto e não ser derivável. Veja, por exemplo, a função módulo...

Proposição

Uma função será derivável num ponto a sse admite ambas as derivadas laterais no ponto a e $f_d'(a) = f_e'(a)$.

Teorema

Se f é derivável no ponto a, então é contínua.

Função Derivada

Definição

Seja I um intervalo aberto de $\mathbb{R}$ e $f : I \to \mathbb{R}$. A função f diz-se derivável em I se for derivável em todos os pontos de I e, nesse caso, podemos definir a função derivada de f:

$$\begin{array}{rccc} f': & I & \to & \mathbb{R} \\ & x & \to & f'(x). \end{array}$$

Note-se que também é possível definir a função derivada em intervalos semi-abertos ou fechados, $]a,b]$, $[a,b[$ ou $[a,b]$ usando a convenção: $f'(a) = f'_d(a)$ e $f'(b) = f'_e(b)$, sempre que se aplicar.

Regras de derivação

Sejam $f, g : I \to \mathbb{R}$ funções deriváveis em I, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $n \in \mathbb{R}$. Então $\lambda f, f+g$, fg e f^n também são deriváveis em I; $\frac{f}{g}$ é derivável em $\{x \in I : g(x) \neq 0\}$, e nestes domínios, tem-se:

- $(f+g)' = f' + g'$
- $(\lambda f)' = \lambda f'$
- $(fg)' = f'g + fg'$
- $(f^n)' = nf'f^{n-1}$
- $(\frac{f}{g})' = \frac{f'g - g'f}{g^2}$

Derivada da função composta

Sejam $f : I \subset \mathbb{R} \to J$ e $g : J \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções e consideremos $a \in I$. Se f é derivável no ponto a e g é derivável no ponto $f(a)$ então a função $g \circ f$ também é derivável no ponto a e tem-se:

$$(g \circ f)'(a) = g'(f(a))f'(a).$$

Derivada da função inversa

Seja $f : I \subset \mathbb{R} \to J$ uma bijecção derivável e consideremos $a \in I$ tal que $f'(a) \neq 0$. Então f^{-1} é derivável no ponto $f(a)$ e tem-se:

$$(f^{-1})'(f(a)) = \frac{1}{f'(a)}.$$

Exemplos

1) $(\sin x)' = \cos x$
2) $(\cos x)' = -\sin x$
3) $(e^x)' = e^x$
4) $(a^x)' = (e^{x \ln a})' = a^x(\ln a)$, $(a > 0)$
5) $(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$
6) $(\cot x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$
7) $(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
8) $(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$
9) $(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$
10) $(\ln x)' = \frac{1}{x}$
11) $(\log_a x)' = (\frac{\ln x}{\ln a})' = \frac{1}{x \ln a}$, $(a > 0)$

Mais geralmente, dada uma f.r.v.r. u diferenciável, temos:

1) $(\sin u)' = u' \cos u$
2) $(\cos u)' = -u' \sin u$
3) $(e^u)' = u' e^u$
4) $(a^u)' = (e^{u \ln a})' = u' a^u (\ln a)$, $(a \geq 0)$
5) $(\tan u)' = \frac{u'}{\cos^2 u}$
6) $(\cot u)' = -\frac{u'}{\sin^2 u}$
7) $(\arcsin u)' = \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
8) $(\arccos u)' = -\frac{u'}{\sqrt{1-u^2}}$
9) $(\arctan u)' = \frac{u'}{1+u^2}$
10) $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$
11) $(\log_a u)' = (\frac{\ln u}{\ln a})' = \frac{u'}{u \ln a}$

Regra de Cauchy

Regra de Cauchy

Sejam f e g duas funções diferenciáveis em $]a,b[\setminus\{c\}$ e $c\in]a,b[$ tais que:

- $g'(x)\neq 0$, para todo o $x\in]a,b[$;
- $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = 0$ (ou $\lim\limits_{x\to c} f(x) = \lim\limits_{x\to c} g(x) = \infty$).

Nestas condições, se existe $\lim\limits_{x\to c}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ então também existe $\lim\limits_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}$ e tem o mesmo valor.

Derivadas de ordem superior à primeira

Seja $f : D \to \mathbb{R}$ uma f.r.v.r. e denotemos por D_1 o subconjunto de D constituído pelos pontos onde f é diferenciável. Tem assim lugar a função f' de domínio D_1. Dado $a \in D_1$ se a função f' for diferenciável em a então diz-se que f é duas vezes diferenciável e chama-se a $(f')'(a) := f''(a)$ a derivada de segunda ordem de f no ponto a.

Podemos agora continuar com o raciocínio e definir a derivada de ordem 3, f''', de ordem 4, $f^{(4)}$, e assim sucessivamente.

Mais precisamente, podemos definir, por recorrência, a derivada de ordem $n \geq 2$ da função f da seguinte maneira

$$\begin{array}{rccc} f^{(n)}: & D_n & \to & \mathbb{R} \\ & x & \mapsto & f^{(n)}(x) := (f^{(n-1)})'(x), \end{array}$$

onde D_n é o subconjunto de D constituído pelos pontos onde $f^{(n-1)}$ é diferenciável.

A função f diz-se infinitamente diferenciável no ponto a se for n-vezes

Diferenciabilidade & Monotonia

Proposição

Se para todo o ponto x num intervalo aberto $I \subset D_f$, se verificar $f'(x) > 0$ (respectivamente, $f'(x) < 0$), então f é estritamente crescente (resp. descrescente) em I.

Extremos

Definição

Diz-se que $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tem um **mínimo** (resp. **máximo**) local no ponto $a \in I$ se existe $\varepsilon > 0$:

$$f(x) \geq f(a)(\text{resp. } f(x) \leq f(a)),\ \forall x \in]a-\varepsilon, a+\varepsilon[\cap I.$$

Neste caso, o ponto a chama-se um **minimizante** (resp. **maximizante**) local de f.

Diz-se que f tem um mínimo (resp. máximo) absoluto no ponto $a \in I$ se:

$$f(x) \geq f(a)(\text{resp. } f(x) \leq f(a)), \forall x \in I.$$

Neste caso, o ponto a diz-se um **minimizante** (resp. **maximizante**) absoluto de f.

Pontos Críticos

Proposição

Seja f uma função diferenciável no ponto a. Se $f(a)$ for extremo de f então $f'(a) = 0$.

No entanto, uma função pode ter derivada nula num ponto, sem que esse ponto corresponda a um ponto de extremo. Chamam-se então **pontos críticos** de uma função aos zeros da sua derivada.

Para esclarecer se um ponto crítico a de uma função derivável f corresponde ou não ponto de extremo, recorre-se ao sinal da primeira derivada:

- se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) > 0$ para $x \in]a-\varepsilon, a[$ e $f'(x) < 0$ para $x \in]a, a+\varepsilon[$, então $f(a)$ é máximo local;
- se existe $\varepsilon > 0$ tal que $f'(x) < 0$ para $x \in]a-\varepsilon, a[$ e $f'(x) > 0$ para $x \in]a, a+\varepsilon[$, então $f(a)$ é mínimo local;

caso contrário, o ponto não será de extremo.

Concavidades

Definição

Sendo f e g duas funções definidas num certo domínio D, diz-se que o **gráfico de f está acima do de g** se:

$$\forall x \in D,\, f(x) \geq g(x).$$

De facto, uma das questões que importa estudar, do ponto de vista local, é a posição do gráfico de uma função diferenciável em a em relação à sua tangente no ponto $(a, f(a))$:

Concavidades

- se existe $\varepsilon > 0$ tal que o gráfico de f está acima da recta tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ no aberto $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, diz-se que a função f é **côncava** no ponto a ou que o seu gráfico tem **concavidade voltada para cima**;

Concavidades

Concavidades

- se existe $\varepsilon > 0$ tal que a recta tangente $y = f(a) + f'(a)(x-a)$ está abaixo do gráfico de f no aberto $]a-\varepsilon, a+\varepsilon[$, diz-se que a função f é **convexa** no ponto a ou que o seu gráfico tem **concavidade voltada para baixo**;
- se existe $\varepsilon > 0$ tal que num dos intervalos $]a-\varepsilon, a[$ e $]a, a+\varepsilon[$ o gráfico está acima da recta tangente e no outro esteja abaixo, diz-se que $(a, f(a))$ é um **ponto de inflexão** do gráfico de f ou que o gráfico de f tem uma inflexão no ponto a.

Proposição

- Uma função 2 vezes derivável é côncava (resp. convexa) nos intervalos abertos onde tem segunda derivada positiva (resp. negativa).
- Se o gráfico de uma função 2 vezes derivável tem uma inflexão num ponto, esse ponto corresponde a um zero da segunda derivada.

Assimptotas

Admitamos que o domínio de uma função f contém um intervalo da forma $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a[$) e seja r uma recta de equação $y = mx + b$.

Diz-se que r é **assimptota ao gráfico de f quando x tende para** $+\infty$ (resp, $-\infty$) se:

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - (mx + b) = 0,$$

(resp.

$$\lim_{x\to-\infty} (f(x) - (mx + b)) = 0.)$$

Assimptotas não verticais

Teorema

Para que gráfico de uma função cujo domínio contém um intervalo da forma $]a,+\infty[$ (resp. $]-\infty,a[$) tenha uma assimptota (não vertical) à direita (resp. à esquerda) é necessário e suficiente que existam e sejam finitos os limites:

- $m = \lim\limits_{x\to+\infty} \frac{f(x)}{x}$;
- $b = \lim\limits_{x\to+\infty} (f(x) - mx)$,

(resp.

- $m = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{f(x)}{x}$;
- $b = \lim\limits_{x\to-\infty} (f(x) - mx)$,)

sendo a assimptota dada pela equação $y = mx + b$.

Assimptotas verticais

Se um ponto a de acumulação ao domínio de f verificar a condição:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \infty$$

(resp.

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \infty)$$

diz-se que $x = a$ é uma **assimptota vertical à esquerda (resp. direita) no ponto** a.

Se $x = a$ for simultaneamente assimptota vertical à direita e à esquerda de a, então diz-se que $x = a$ é **assimptota vertical bilateral**.

Estudo completo de uma função

Como fazer o estudo completo de uma f.r.v.r.?

1º Determinar o domínio;

2º Estudar a continuidade;

3º Averiguar a existência de assimptotas;

4º Calcular a derivada de f e estudar a função quanto à monotonia e existência de extremos;

5º Calcular a segunda derivada de f e estudar o sentido das concavidade de f e existência de pontos de inflexão;

6º Esboçar o gráfico;

7º Determinar contradomínio recorrendo ao gráfico.

Primitivação

Definição

Seja I um intervalo não degenerado de $\mathbb{R}$ e consideremos uma função $f : I \to \mathbb{R}$.

A função f diz-se **primitivável em I** se existir uma função $g : I \to \mathbb{R}$ tal que:

$$g'(x) = f(x),\ \forall x \in I,$$

chamando-se **primitiva de f em I** a qualquer função nestas condições.

Exemplos

A primitiva da função $\cos x$ é a função $\sin x$. Qual será a primitiva da função $\sin x$?

Primitivação

Resulta imediatamente da definição que dada uma primitiva g de f em I, a função $g + C$ é também uma primitiva de f em I, para qualquer constante real C.

Reciprocamente, dadas duas primitivas g e h de f em I, por definição, tem-se

$$(g - h)'(x) = g'(x) - h'(x) = 0,$$

para todo o $x \in I$, pelo que $g - h$ é uma função constante em I.

Conclusão

Se uma função for primitivável, então admite infinitas primitivas que diferem entre si por uma constante.

Neste curso, vamos usar a notação Pf, $\int f$ ou $\int f(x)dx$ para denotar a expressão geral das primitivas de f em I, isto é:

$$Pf = g + C, \ C \in \mathbb{R},$$

para qualquer primitiva g de f em I.

Observamos agora que **nem todas as funções são primitiváveis.**

Exemplo

A função de Heaviside $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por

$$H(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ 1, & x \geq 0, \end{cases}$$

não é primitivável em qualquer intervalo I que contenha a origem.

Com efeito, se H admitisse uma primitiva g num intervalo I contendo a origem, esta função teria de estar necessariamente definida em I da forma

$$g(x) = \begin{cases} x + c, & x < 0 \\ c, & x \geq 0 \end{cases},$$

para uma certa constante $c \in \mathbb{R}$, o que nos leva a uma contradição, uma vez que uma função assim definida nunca poderá ser diferenciável na origem.

Por outro lado, existem funções primitiváveis para as quais não se consegue calcular primitivas!

CATÓLICA LISBON SCHOOL OF BUSINESS & ECONOMICS

Propriedades da primitivação

1) $Paf = aPf, \ \forall a \in \mathbb{R}$,
2) $P(f+g) = Pf + Pg$,
3) $Pf' = f$,
4) $(Pf)' = f$.

Tabela de Primitivas Imediatas

Seja u uma função real de variável real diferenciável. Temos:

$P u' u^m = \frac{u^{m+1}}{m+1} + C \; (m \neq -1)$	$P \frac{u'}{u} = \ln \lvert u \rvert + C$
$P u' e^u = e^u + C$	$P u' \cos u = \sin u + C$
$P u' a^u = P u' e^{u(\ln a)} = \frac{a^u}{\ln a} + C$	$P u' \sin u = -\cos u + C$
$P \frac{u'}{\cos^2 u} = \tan u + C$	$P \frac{u'}{\sin^2 u} = -\text{cotan} u + C$
$P \frac{u'}{1+u^2} = \arctan u + C$	
$P \frac{u'}{\sqrt{1-u^2}} = \arcsin u + C = -\arccos u + C$	

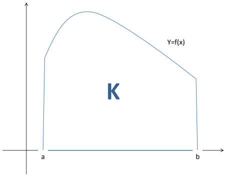
Cálculo Integral

Uma das maneiras mais naturais de motivar o conceito de integral é recorrer à noção de área.

Consideremos uma função $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ $(a < b)$, limitada, contínua, não negativa e denotemos por K o conjunto:

$$K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\},$$

designado por **conjunto das ordenadas de** f **sobre o intervalo** $[a, b]$.



A área da região K pode ser calculada através do **integral de** f **no intervalo** $[a, b]$, representado por $\int_a^b f(x)dx$.

Integral definido

Integral definido

Mais geralmente, define-se o **integral definido** de qualquer função **integrável** f (no sentido de Riemann) no intervalo $[a, b]$, representado por

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Teorema

Qualquer função contínua num intervalo I da forma $[a, b]$ é integrável em I.

Exemplo

Seja f uma função constante igual a $c > 0$ em $[a, b]$.
Sendo f contínua, sabemos ser integrável. Qual será o valor do integral:

$$\int_a^b c dx?$$

Propriedades do integral definido

Propriedades do Integral Definido

Sejam f e g são duas funções integráveis no intervalo I:

(1) A soma $f+g$ também é integrável e tem-se:

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx.$$

(2) Dado $c \in \mathbb{R}$, temos que cf também é integrável e tem-se:

$$\int_a^b cf(x)dx = c\int_a^b f(x)dx.$$

Propriedades do integral definido

(3) Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in I$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$

Em particular, se f for uma função integrável em I, tal que $f(x) \geq 0$, para todo o $x \in I$, então:

$$\int_a^b f(x)dx \geq 0.$$

(4) Se f é uma função integrável no intervalo I, então $|f|$ também é integrável e tem-se:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

Propriedades do integral definido

Proposição

Sejam $a, b, c \in \mathbb{R}$ tais que $a < c < b$ e suponhamos que f é integrável em qualquer um dos intervalos $[a, c]$ e $[c, b]$. Então, f também é integrável em $[a, b]$ e tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Proposição

Qualquer função f limitada num intervalo I e contínua em todos os pontos desse intervalo, excepto, quando muito, num número finito de pontos, é integrável em I.

Propriedades do integral definido

Proposição

Sejam f e g funções tais que $f(x) = g(x)$ para todo o $x \in I$, excepto, quando muito, nos pontos de um subconjunto finito de I. Então, f será integrável em I se, e somente se, g o for e, nesse caso, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^b g(x)dx.$$

Convenções

- $\int_a^a f(x)dx = 0, \ \forall a \in \mathbb{R}.$
- $\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx \ \forall a, b \in \mathbb{R}, a < b.$

Desta forma, dada uma função f integrável num intervalo que contenha $a, b, c \in \mathbb{R}$, tem-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx.$$

Teorema do Valor Médio

Vamos ver agora como se relacionam os conceitos de derivada e integral no chamado **Teorema Fundamental de Análise**. A demonstração deste Teorema necessita do seguinte resultado:

Teorema do valor médio

Seja f uma função integrável no intervalo a e b ($a < b$ ou $b < a$) e designem-se, respectivamente, por M e m o supremo e o ínfimo de f no mesmo intervalo. Então, existe $\lambda \in [m, M]$ tal que:

$$\int_a^b f(x)dx = \lambda(b - a).$$

Note-se que, em particular, este resultado diz-nos que a área do conjunto das ordenadas de uma função integrável e positiva sobre um intervalo $[a, b]$ coincide com a área do quadrado de lados $[a, b]$ e $[0, \lambda]$, onde λ pertence ao intervalo limitado pelo ínfimo e supremo de f, respectivamente.

Integral Indefinido

Definição

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ (não degenerado) e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em I. Dado $a \in I$, chama-se **integral indefinido de** f com origem em a à função φ definida em I pela fórmula:

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)dt.$$

Propriedades do Integral Indefinido

Teorema

Seja I um intervalo de $\mathbb{R}$ (não degenerado) e $f : I \to \mathbb{R}$ uma função integrável em cada intervalo limitado e fechado contido em I. Sejam $a, b \in I$ e denotemos por φ_a, φ_b os integrais indefinidos de f com origens nos pontos a e b, respectivamente. Então:

i) a diferença de φ_a e φ_b é constante em I, tendo-se precisamente:

$$\varphi_a - \varphi_b = \int_a^b f(x)dx;$$

ii) a função φ_a é contínua no intervalo I.

Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema

Seja $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ $(a < b$)uma função contínua. Então o integral indefinido com origem em a, $\varphi_a(x) = \int_a^x f(t)dt$ é uma função com derivada contínua em $[a,b]$, dada em cada ponto por:

$$\varphi_a'(x) = \frac{d(\int_a^x f(t)dt)}{dx}(x) = f(x).$$

Este resultado implica, em particular, que toda a função contínua num intervalo I é primitivável, admitindo como primitiva o integral indefinido com origem em qualquer ponto do intervalo I. Além disso, tem-se:

Regra de Barrow

Regra de Barrow

Seja f um função contínua (ou simplesmente integrável) no intervalo $[a, b]$ e seja F uma primitiva qualquer de f no mesmo intervalo. Então:

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) := [F(x)]_a^b.$$

Temos então a seguinte relação entre os conceitos já estudados:

$$\text{Diferenciabilidade } \Rightarrow \text{Continuidade} \Rightarrow \text{Integrabilidade},$$

não sendo nenhuma das implicações uma equivalência.

Regra de Leibniz

Como vimos, pelo Teorema fundamental do Cálculo Integral, o integral indefinido associado a uma função f contínua num intervalo I é diferenciável nesse intervalo I, com derivada dada pela própria função f.

Se usarmos este resultado em conjunto com o Teorema da derivada da função composta, prova-se a chamada **regra de Leibniz**:

Regra de Leibniz

Seja f uma função contínua num intervalo aberto I e consideremos funções a e b diferenciáveis em I. Então, a função definida por $x \mapsto \int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt$ é diferenciável em I e tem-se:

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{a(x)}^{b(x)} f(t)dt\right) = f(b(x))b'(x) - f(a(x))a'(x).$$

Cálculo de áreas planas

Seja $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ uma função contínua e não negativa. Tal como vimos anteriormente, o integral de f em $[a, b]$ representa a área da região:

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}.$$

No caso em que f é não positiva o valor do integral $\int_a^b f(x)dx$ representa o simétrico da área da região $\{(x, y) \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b, f(x) \leq y \leq 0\}$.

Cálculo de áreas planas

Mais geralmente, dadas duas funções $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$, tais que $g(x) \leq f(x)$, para todo o $x \in [a, b]$, a área da região plana

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}; a \leq x \leq b, g(x) \leq y \leq f(x)\}$$

é representada pelo integral:

$$\int_a^b (f - g)(x)dx.$$

Integrais Impróprios

Ao definir o integral $\int_a^b f(x)dx$, partimos de dois pressupostos essenciais:

- a limitação do intervalo de integração
- a limitação da função integranda no intervalo $[a, b]$

De facto, estas hipóteses podem ser suprimidas e podemos generalizar a definição de integral da seguinte maneira:

Integrais Impróprios de 1ª e 2ª Espécie

Definição

Seja f uma função definida em $[a, b[$ (podendo b ser $+\infty$ ou um número real tal que $x = b$ é assimptota ao gráfico de f) e integrável em qualquer intervalo da forma $[a, x]$, com $a < x < b$. Define-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to b^-} \int_a^x f(t)dt.$$

Analogamente, se f estiver definida em $]a, b]$ (podendo a ser $-\infty$ ou um número real tal que $x = a$ é assimptota ao gráfico de f) e integrável em qualquer intervalo da forma $[x, b]$, com $a < x < b$. Define-se:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{x \to a^+} \int_x^b f(t)dt.$$

Integrais Impróprios de 1ª e 2ª Espécie

Os integrais assim definidos dizem-se **impróprios** e são **convergentes** caso os limites que figuram nos segundos membros das igualdades anteriores existam e sejam finitos. Caso contrário, dizem-se divergentes.

Nestas condições, o integral impróprio diz-se ainda:

- de **primeira espécie** se $a = -\infty$ ou $b = +\infty$.
- de **segunda espécie** se $a, b \in \mathbb{R}$ e a função f for ilimitada.

Propriedades dos Integrais Impróprios

Proposição

Se f e g são funções definidas em $[a,b[$ (respectivamente, $]a,b]$) e $\int_a^b f(x)dx$, $\int_a^b g(x)dx$ são convergentes, então:

1) $\int_a^b (f+g)(x)dx$ é convergente e

$$\int_a^b (f+g)(x)dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx,$$

2) Se $k \in \mathbb{R}$, $\int_a^b (kf)(x)dx$ é convergente e tem-se

$$\int_a^b (kf)(x)dx = k\int_a^b f(x)dx,$$

3) Se $f(x) \leq g(x)$, para todo o $x \in [a,b[$ (resp. $]a,b]$), tem-se

$$\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx.$$