



Funções definidas implicitamente e seus extremos

ANO LECTIVO: 2010/2011

GA4

Elaborado pela docente ROSÁRIO LAUREANO

DMQ – Dpto de Métodos Quantitativos

1 Teorema da Função Implícita

Muitas relações da forma $\varphi(x, y, z) = 0$ podem ser escritas na forma $z = f(x, y)$. É o caso da relação $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$ a que pode ser dada a forma equivalente a $z = 4 - x^2 - y^2$. No primeiro caso temos uma relação escrita na **forma implícita** (ou simplesmente **relação implícita**) e, no segundo caso, uma relação escrita na **forma explícita** (porque a igualdade está resolvida em ordem à variável z , considerada como dependente). Digamos que à relação implícita $x^2 + y^2 + z - 4 = 0$ está associada uma função f nas variáveis x e y , $f(x, y) = 4 - x^2 - y^2$, tal que $z = f(x, y)$ é uma "explicitação global" da relação original.

No entanto, existem relações da forma $\varphi(x, y, z) = 0$ em que a escrita na forma $z = f(x, y)$ não é imediata e apenas é garantida de forma local na vizinhança de alguns pontos "especiais". É o caso da relação

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$$

que tomamos de seguida como exemplo.

SOB O PONTO DE VISTA ANALÍTICO. Temos $z^2 = 4 - x^2 - y^2$ de que resulta

$$z = \pm \sqrt{4 - x^2 - y^2}.$$

Se $z \geq 0$ então $z = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, mas se $z < 0$ então $z = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}$. São assim obtidas duas relações escritas na forma explícita:

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \text{válida para } z \geq 0,$$

e

$$z = g(x, y) = -\sqrt{4 - x^2 - y^2}, \quad \text{válida para } z < 0.$$

Digamos que, a partir da relação implícita

$$\varphi(x, y, z) = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0,$$

não surge uma única função: surgem duas funções f e g tais que $z = f(x, y) \wedge z \geq 0$ ou $z = g(x, y) \wedge z < 0$. Portanto, não existe uma única relação na forma explícita que seja equivalente à relação dada na forma implícita. A cada ponto (x, y) correspondem dois valores de z onde é válida a relação implícita

$$\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0.$$

Assim, para cada ponto (x, y, z) que verifique $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, não é possível explicitar z como função de (x, y) (z como imagem de (x, y)) de forma única.

SOB O PONTO DE VISTA GEOMÉTRICO. Atendendo à equivalência

$$x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow x^2 + y^2 + z^2 = 4,$$

concluimos que a relação $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ define os pontos da superfície esférica de centro $(0, 0, 0)$ e raio 2. A projecção desta superfície esférica sobre o plano xOy (onde $z = 0$) o círculo definido pela condição $x^2 + y^2 \leq 4$. Qualquer recta vertical, que passe pelo interior deste círculo, intersecta a superfície esférica em dois pontos, um no hemisfério superior e outro no hemisfério inferior. De facto, a cada ponto $(x, y, 0)$ tal que $x^2 + y^2 \leq 4$, correspondem dois pontos sobre a superfície esférica, a saber,

$$P_1 \left(x, y, \sqrt{4 - x^2 - y^2} \right) \quad \text{e} \quad P_2 \left(x, y, -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right),$$

ou ainda

$$P_1(x, y, f(x, y)) \quad \text{e} \quad P_2(x, y, g(x, y)).$$

EXPLICITAÇÃO LOCAL. Embora, dado um ponto genérico (x, y, z) que verifique $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, não seja possível explicitar z como função de (x, y) de forma única, existem pontos específicos onde é possível uma "explicitação local". Tal é garantido pelo Teorema da Função Implícita indicado (será exposto à frente). Contudo, esses pontos específicos terão de verificar certas propriedades.

Consideremos os pontos $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ e $(a', b', c') = (0, 2, 0)$. Ambos verificam a relação implícita $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$, pois

$$\begin{aligned} \varphi(a, b, c) &= \varphi(0, 0, 2) = 0^2 + 0^2 + 2^2 - 4 = 0 \\ \varphi(a', b', c') &= \varphi(0, 2, 0) = 0^2 + 2^2 + 0^2 - 4 = 0. \end{aligned}$$

No entanto, a derivada parcial de φ em ordem a z é não-nula no caso do ponto $(0, 2, 0)$

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, 0, 2) = (2z)|_{(0,0,2)} = 2 \cdot 2 = 4 \neq 0,$$

mas é nula no caso do ponto $(0, 0, 2)$,

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, 2, 0) = (2z)|_{(0,2,0)} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Por outro lado, localizemos os dois pontos $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ e $(a', b', c') = (0, 2, 0)$ na superfície esférica. O ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ está situado no "pólo norte", portanto no hemisfério superior, enquanto o ponto $(a', b', c') = (0, 2, 0)$ está situado no "equador", não pertencendo a nenhum dos hemisférios. Dado que o ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ fixa o hemisfério superior (pois $z = 2 > 0$), podemos dizer que $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 4 = 0$ pode ser explicitada de forma única como

$$z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$$

em torno do ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$. Tal não é possível afirmar relativamente ao ponto $(a', b', c') = (0, 2, 0)$ visto que ele não fixa qualquer um dos hemisférios.

Podemos afirmar quanto ao ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ que, para qualquer ponto (x, y) numa vizinhança $V_\delta(0, 0)$ de $(0, 0)$, existe um único ponto na superfície esférica (um único valor de z) na vizinhança de $(a, b, c) = (0, 0, 2)$, visto que o próprio ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$ fixa um hemisfério. Quanto ao ponto $(a', b', c') = (0, 2, 0)$, para qualquer ponto (x, y) numa vizinhança $V_\varepsilon(0, 2)$ de $(0, 2)$, existem dois pontos na superfície esférica (dois valores de z) na vizinhança de $(a', b', c') = (0, 2, 0)$, um de cota positiva e outro de cota negativa (visto que não está previamente fixado um hemisfério a que o próprio ponto $(a', b', c') = (0, 2, 0)$ pertença). Relativamente ao ponto $(a, b, c) = (0, 0, 2)$, é formal afirmar que a relação $\varphi(x, y, z) = 0$ **define implicitamente z como função de x e de y** numa vizinhança $V_\delta(0, 0)$ de $(0, 0)$, ou seja,

$$z = f(x, y), \quad \forall (x, y) \in V_\delta(0, 0).$$

Não esquecendo a diferença verificada quanto à derivada parcial de φ em ordem a z em cada um dos pontos P e Q , consideremos o teorema seguinte.

TEOREMA da FUNÇÃO IMPLÍCITA (formulação 1) Dada uma relação da forma $\varphi(x, y, z) = 0$ e um ponto (a, b, c) tal que

- (i) $\varphi(a, b, c) = 0$ e
- (ii) existem e são contínuas todas as derivadas parciais de primeira ordem de φ , $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ e $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$, numa bola aberta centrada no ponto (a, b, c) ;
então ela (a relação) **define implicitamente z como função de x e de y** numa vizinhança $V_\delta(a, b)$ de (a, b) se

(iii) $\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \neq 0$.

Tal significa que existe uma vizinhança $V_\delta(a, b)$ de (a, b) e uma função $f(x, y)$ que admite derivadas parciais de primeira ordem contínuas em $V_\delta(a, b)$, verifica $f(a, b) = c$ e $\varphi(x, y, f(x, y)) = 0, \forall (x, y) \in V_\delta(a, b)$ (ou seja, $z = f(x, y), \forall (x, y) \in V_\delta(a, b)$). As derivadas parciais de primeira ordem de f no ponto (a, b) são dadas por

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) & \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) \end{bmatrix} = - \left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right]^{-1} \cdot \begin{bmatrix} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) & \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b, c) \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(a, b) &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} \\ \frac{\partial f}{\partial y}(a, b) &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b, c) = - \frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}. \end{aligned}$$

Dado que $f(x, y)$ toma o papel de z , as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ no ponto (a, b) garantidas pelo Teorema podem ser escritas como $\frac{\partial z}{\partial x}(a, b)$ e $\frac{\partial z}{\partial y}(a, b)$.

Aplicando estas fórmulas ao exemplo mencionado, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, 0, 2) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial x}(0, 0, 2) \\ &= - \left((2z)|_{(0,0,2)} \right)^{-1} \cdot (2x)|_{(0,0,2)} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(0, 0, 2) \right)^{-1} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial y}(0, 0, 2) \\ &= - \left((2z)|_{(0,0,2)} \right)^{-1} \cdot (2y)|_{(0,0,2)} = -\frac{1}{4} \cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

Neste exemplo sabemos que $z = f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$, pelo que podemos confirmar os valores obtidos para $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)'_x \Big|_{(0,0)} = \left(\frac{1}{2} \frac{-2x}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right) \Big|_{(0,0)} = \frac{0}{4} = 0, \\ \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) &= \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} \right)'_y \Big|_{(0,0)} = \left(\frac{1}{2} \frac{-2y}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}} \right) \Big|_{(0,0)} = \frac{0}{4} = 0.\end{aligned}$$

Note que, em geral, a concretização de $z = f(x, y)$ não é possível (caso em que o teorema tem particular importância). É o que acontece se a relação na forma implícita for dada, por exemplo, por $z + z^2x - xy = 0$ ou $z + \sin z - xy = 0$.

2 Extremos locais (ou relativos) de funções definidas implicitamente

Pretendemos determinar os extremos da função $z = f(x, y)$ definida implicitamente pela relação $\varphi(x, y, z) = 0$. Resolvendo o sistema

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z)} = 0 \\ -\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(x, y, z)} = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right\} \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{array} \right.$$

obtêm-se os possíveis pontos críticos (a, b) (de estacionaridade ou estacionários) da função f que, conforme a última equação do sistema, verificam $\varphi(a, b, c) = 0$. Eles serão designados por pontos críticos se verificarem a condição **(iii)** do Teorema da Função Implícita, a saber,

$$\textbf{(iii)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \neq 0.$$

Uma vez verificada esta condição, construímos a matriz Hessiana¹

$$\mathbf{H}f(a, b) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a, b) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} & -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} \\ -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y \partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} & -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} \end{bmatrix}$$

¹Note que, pela regra de derivação do quociente, temos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) &= \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(-\frac{\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)} \right) \\ &= -\frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) - \frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) \cdot \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right)}{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right]^2}. \end{aligned}$$

Atendendo a que, em pontos críticos se tem

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 0$$

(uma das equações do sistema acima), obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) \right) \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}{\left[\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \right]^2} = -\frac{\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}(a, b, c) \right)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}.$$

Pela regra de derivação da função composta pois sabemos que $z = f(x, y)$, temos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, b, c) + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial z}(a, b, c) \cdot \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}.$$

Finalmente, atendendo a que em pontos críticos se tem $\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 0$ (uma das equações do sistema acima), obtemos

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a, b) = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x \partial y}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}.$$

Para a obtenção das restantes derivadas de segunda ordem que constituem a matriz Hessiana, procedemos de modo análogo.

relativa a cada um dos pontos críticos (a, b) tal que $\varphi(a, b, c) = 0$. O critério de classificação dos pontos críticos baseia-se no sinal dos determinantes principais

$$\Delta_1 = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, b, c) \\ \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) \end{bmatrix} = -\frac{\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(a, b, c)}{\frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c)}$$

e

$$\Delta_2 = \det \mathbf{H}f(a, b).$$

O ponto crítico é um **mínimo local** de f se $\Delta_1 > 0$ e $\Delta_2 > 0$ e é um **máximo local** de f se $\Delta_1 < 0$ e $\Delta_2 > 0$ (análogo ao válido em funções definidas de forma explícita). Se tem início uma das ordenações de sinal acima mas $\Delta_2 = 0$ (ou mesmo se $\Delta_1 = \Delta_2 = 0$) então nada se pode concluir através dos determinantes principais. Nos restantes casos, incluindo se $\Delta_1 = 0$ mas $\Delta_2 \neq 0$, então o ponto crítico **não é nem máximo nem mínimo** de f , e diz-se um **ponto de sela**.

Example 1 Para determinar os extremos relativos da função $f(x, y)$ definida implicitamente pela relação $\varphi(x, y, z) = 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0$, há que resolver o sistema

$$\begin{cases} \frac{\partial \varphi}{\partial x}(x, y, z) = 0 \\ \frac{\partial \varphi}{\partial y}(x, y, z) = 0 \\ \varphi(x, y, z) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x - 8z = 0 \\ 4y = 0 \\ 2x^2 + 2y^2 + z^2 - 8xz - z + 8 = 0 \end{cases}.$$

Temos então

$$\begin{aligned} \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ 2(2z)^2 + 0 + z^2 - 8(2z)z - z + 8 = 0 \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ -7z^2 - z + 8 = 0 \end{cases} \\ &\Leftrightarrow \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z = 1 \vee z = -\frac{8}{7} \end{cases} \end{aligned}$$

Como, pela fórmula resolvente, temos

$$-7z^2 - z + 8 = 0 \Leftrightarrow z = 1 \quad \vee \quad z = -\frac{8}{7},$$

o sistema é equivalente a

$$\begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 2z \\ y = 0 \\ z = -\frac{8}{7} \end{cases}$$

ou ainda

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 0 \\ z = 1 \end{cases} \vee \begin{cases} x = -\frac{16}{7} \\ y = 0 \\ z = -\frac{8}{7} \end{cases}.$$

Ambos os pontos $(a, b) = (2, 0)$, com $c = 1$, e $(a', b') = (-16/7, 0)$, com $c = -8/7$, são pontos críticos porque verificam a condição **(iii)**,

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a, b, c) &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}(2, 0, 1) = (2z - 8x - 1)|_{(2,0,1)} \\ &= 2 - 16 - 1 = -15 \neq 0, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial z}(a', b', c') &= \frac{\partial \varphi}{\partial z}\left(-\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right) = (2z - 8x - 1)|_{\left(-\frac{16}{7}, 0, -\frac{8}{7}\right)} \\ &= -\frac{16}{7} + \frac{128}{7} - 1 = 15 \neq 0. \end{aligned}$$

A matriz Hessiana (geral) é

$$\begin{aligned} \mathbf{H}f(x, y) &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-2z - 8x - 1} & -\frac{0}{-2z - 8x - 1} \\ -\frac{0}{-2z - 8x - 1} & -\frac{4}{-2z - 8x - 1} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{4}{-2z - 8x - 1} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{-2z - 8x - 1} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Para o ponto crítico $(a, b) = (2, 0)$, com $c = 1$, temos então

$$\mathbf{H}f(a, b) = \mathbf{H}f(2, 0) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{-15} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{-15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{4}{15} & 0 \\ 0 & \frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

cujos determinantes principais são

$$\Delta_1 = \frac{4}{15} > 0 \quad e \quad \Delta_2 = \left(\frac{4}{15}\right)^2 > 0.$$

Assim a função f tem no ponto $(a, b) = (2, 0)$ um mínimo relativo. Quanto ao ponto crítico $(a', b') = (-16/7, 0)$, com $c = -8/7$, temos então

$$\mathbf{H}f(a', b') = \mathbf{H}f\left(-\frac{16}{7}, 0\right) = \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{4}{15} & 0 \\ 0 & -\frac{4}{15} \end{bmatrix}$$

cujos determinantes principais são

$$\Delta_1 = -\frac{4}{15} < 0 \quad e \quad \Delta_2 = \left(-\frac{4}{15}\right)^2 > 0.$$

Assim a função f tem no ponto $(a', b') = \left(-\frac{16}{7}, 0\right)$ um máximo relativo.