ANÁLISE de SENSIBILIDADE em problemas de PL

ANO LECTIVO: 2013/2014

GA4

Elaborado pela docente ROSÁRIO LAUREANO

DM – Dpto de Matemática

Efectuar a análise de sensibilidade de um problema de PL é averiguar acerca da **flexibilidade do plano óptimo** (note que este inclui o **ponto óptimo** e o **valor óptimo**). Para tal, há que determinar a variação permitida em cada uma das constantes do problema, a saber:

- nos **coeficientes** c_i **das variáveis de decisão na f.o.** de modo a manter o ponto óptimo, embora se altere o valor óptimo (este é função de c_i, para cada c_i considerado a variar);
- nos **termos independentes** b_j **das restrições técnicas** de modo que a manter as restrições activas[1], ou seja, de modo a manter as variáveis básicas da SBA óptima. Embora as restrições activas sejam as que definem o ponto óptimo (e estas não são alteradas), pode ocorrer ou não alteração do ponto óptimo e do valor óptimo:
  - se a restrição R_j for activa então o ponto óptimo sofre alteração (as suas coordenadas são função de b_j, para cada b_j considerado a variar), assim como o valor óptimo;
  - se a restrição R_j não for activa então não há alteração do ponto óptimo (nem do valor óptimo).

Quando se averigúa a variação de um dos c_i (respectivamente, b_j) consideram-se os restantes c_i (respectivamente, b_j) com o valor original no problema.

A análise fica completa quando se determinam as consequências para o ponto óptimo e para o valor óptimo das variações permitidas nas constantes c_i e b_j **acima** referidas.

Embora a análise de sensibilidade possa ser feita com base na resolução gráfica (método gráfico ou método do gradiente) (Subsecção 1.3) sempre que o número n de variáveis de decisão é 2, interessa considerar essa análise com base:

- no **Relatório de Sensibilidade** fornecido como *output* da ferramenta **Solver** da folha de cálculo Excel.
- no **quadro óptimo do método do Simplex**.

[1] Uma restrição (técnica ou lógica) diz-se **activa** quando é uma das que define o ponto óptimo.

Em tudo o que se segue, consideramos o seguinte problema de PL
$MAX \quad Z = 7x + 3y$ s.a.

$$\begin{cases} 2x + y \leq 10 \\ 8x + y \leq 20 \\ 3x - y \leq \dfrac{9}{2} \\ x, y \geq 0 \end{cases},$$

cuja forma normal é
$MAX \quad Z = 7 \cdot x + 3 \cdot y + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$ s.a.

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 10 \\ 8x + y + s_2 = 20 \\ 3x - y + s_3 = \dfrac{9}{2} \\ x, y \geq 0, \qquad s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases}.$$

Designemos os coeficientes das variáveis de decisão na f.o. por c_i, em que $i = 1, 2, \ldots, 5$, e os termos independentes das restrições técnicas por b_j, em que $j = 1, 2, 3$.

1 Obtenção dos intervalos de variação com base no *output* do Solver

O *output* da ferramenta **Solver** da folha de cálculo Excel é constituído por um Relatório de Respostas e por um Relatório de Sensibilidade. Em ambos há informação **"Células Ajustáveis"** ("*Adjustable Cells*") e **"Restrições"** ("*Constraints*"). O Relatório de Sensibilidade é, como o nome indica, particularmente importante para a análise de sensibilidade.

1.1 Intervalo de variação de cada coeficiente c_i da f.o.

As colunas "Permissível Aumentar" ("*Allowable Increase*") e "Permissível Diminuir" ("*Allowable Decrease*") das **"Células Ajustáveis"** indicam como podem variar os c_i:

c_1 : Tem o valor original 7. Sendo o coeficiente de x, é indicado na 1^a linha que
$$c_1 \in [7-1, 7+17] = [6, 24].$$

c_2 : Tem o valor original 3. Sendo o coeficiente de y, é indicado na 2^a linha que
$$c_2 \in [3-2.125, 3+0.5] = [0.875, 3.5] = \left[\frac{7}{8}, \frac{7}{2}\right].$$

1.2 Intervalo de variação do termo independente b_j de cada restrição técnica

As colunas "Permissível Aumentar" e "Permissível Diminuir" das **"Restrições"** indicam como podem variar os b_j:

b_1 : Tem o valor original 10. Sendo o termo independente da restrição R_1, é indicado na 1^a linha que
$$b_1 \in [10-3.(36), 10+10] = [6.(63), 20] = \left[\frac{73}{11}, 20\right].$$

b_2 : Tem o valor original 20. Sendo o termo independente da restrição R_2, é indicado na 2^a linha que
$$b_1 \in [20-10, 20+7.4] = [10, 27.4] = \left[10, \frac{137}{5}\right].$$

b_3 : Tem o valor original 9/2. Sendo o termo independente da restrição R_3, é indicado na 3^a linha que
$$b_1 \in \left[\frac{9}{2} - 6.1(6), \frac{9}{2} + (+\infty)\right[= [-1.(6), +\infty[= \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[$$

(note que a indicação 1E+30 significa aumento ilimitado; esta indicação também informa que a restrição R_3 é não-activa).

2 Obtenção dos intervalos de variação com base no quadro óptimo do Simplex

O quadro óptimo resultante da aplicação do método do Simplex informa qual a SBA óptima e qual o valor óptimo. A nulidade ou não das coordenadas da SBA óptima determina quais as restrições activas e não-activas. No entanto, este quadro contém ainda os elementos que relacionam:

- os coeficientes c_i das variáveis de decisão na f.o. com os preços-sombra S_j^*, e
- os termos independentes b_j das restrições técnicas com as coordenadas das variáveis básicas na SBA óptima.

Dada a forma normal do problema de PL que está a ser considerado, $MAX \quad Z = 7 \cdot x + 3 \cdot y + 0 \cdot s_1 + 0 \cdot s_2 + 0 \cdot s_3$ s.a.

$$\begin{cases} 2x + y + s_1 = 10 \\ 8x + y + s_2 = 20 \\ 3x - y + s_3 = \dfrac{9}{2} \\ x, y \geq 0, \qquad s_1, s_2, s_3 \geq 0 \end{cases},$$

tomemos como SBA inicial

$$(x, y, s_1, s_2, s_3) = (0, 0, 10, 20, 9/2)$$

para aplicar o método do Simplex. O quadro inicial é

	x	y	s_1	s_2	s_3	
s_1	2	1	**1**	0	0	10
s_2	8	1	0	**1**	0	20
s_3	3	-1	0	0	**1**	9/2
	-7	-3	**0**	**0**	**0**	0

.

O algoritmo termina ao fim do 4^o quadro (incluindo obviamente o inicial) passando pelas seguintes SBA (indicadas por cada um dos quadros)

$$\begin{array}{lcl}
\text{após } 2^o \text{ quadro } (x,y,s_1,s_2,s_3) & = & \left(\frac{9}{6},0,7,8,0\right) \text{ [ponto extremo } \left(\frac{9}{6},0\right) \text{]} \\
& \downarrow & \\
\text{após } 3^o \text{ quadro } (x,y,s_1,s_2,s_3) & = & \left(\frac{49}{22},\frac{24}{11},\frac{37}{11},0,0\right) \text{ [pto extr. } \left(\frac{49}{22},\frac{24}{11}\right) \text{]} \\
& \downarrow & \\
\text{após } 4^o \text{ quadro } (x,y,s_1,s_2,s_3) & = & \left(\frac{5}{3},\frac{20}{3},0,0,\frac{37}{6}\right) \text{ [pto extr. ópt. } \left(\frac{5}{3},\frac{20}{3}\right) \text{].}
\end{array}$$

Pela nulidade ou não das coordenadas da SBA óptima

$$(x,y,s_1,s_2,s_3) = \left(\frac{5}{3},\frac{20}{3},0,0,\frac{37}{6}\right),$$

concluímos que são activas as restrições R_1 e R_2 (aquelas em que os recursos b_j foram gastos na totalidade pois $s_1 = 0 = s_2$) e não-activas as restantes (R_3, $x \geq 0$ e $y \geq 0$). O quadro óptimo (4^o quadro) é

	x	y	s_1	s_2	s_3	
s_3	0	0	11/6	−5/6	**1**	37/6
y	0	**1**	4/3	−1/3	0	20/3
x	**1**	0	−1/6	1/6	0	5/3
	0	**0**	17/6	1/6	**0**	95/3

.

2.1 Intervalo de variação de cada coeficiente c_i da f.o.

A partir do quadro óptimo do Simplex podemos obter os preços-sombra S_1^*, S_2^* e S_3^* relativos aos recursos das restrições técnicas

$$\begin{aligned}
S_1^* &= -c_3 + \frac{11}{6}\cdot c_5 + \frac{4}{3}\cdot c_2 - \frac{1}{6}\cdot c_1 \\
S_2^* &= -c_4 - \frac{5}{6}\cdot c_5 - \frac{1}{3}\cdot c_2 + \frac{1}{6}\cdot c_1 \qquad (1) \\
S_3^* &= -c_5 + 1\cdot c_5 = 0,
\end{aligned}$$

por leitura em coluna das linhas relativas às restrições técnicas. Note que apenas têm interesse os preços-sombra relativos as restrições activas R_1 e R_2 por serem aquelas em que os recursos b_j foram gastos na totalidade (é nessas restrições que o aumento dos recursos em uma unidade pode produzir algum efeito na solução óptima do problema), o que é confirmado por $S_3^* = 0$. Na verdade, substituindo $c_1 = 7$, $c_2 = 3$ e $c_5 = 0$ em (1), obtemos a confirmação dos preços-sombra

$$S_1^* = \frac{17}{6}, \quad S_2^* = \frac{1}{6} \quad \text{e} \quad S_3^* = 0$$

(os elementos presentes na última linha do quadro óptimo) dos recursos b_1 e b_2 das restrições activas:

$$\begin{aligned}
S_1^* &= -0 + \frac{11}{6}\cdot 0 + \frac{4}{3}\cdot 3 - \frac{1}{6}\cdot 7 = 4 - \frac{7}{6} = \frac{17}{6} \\
S_2^* &= -0 - \frac{5}{6}\cdot 0 - \frac{1}{3}\cdot 3 + \frac{1}{6}\cdot 7 = -1 + \frac{7}{6} = \frac{1}{6} \\
S_3^* &= -0 + 1\cdot 0 = 0.
\end{aligned}$$

As expressões em (1) podem ser usadas para determinar os intervalos de variação dos coeficientes c_i das variáveis de decisão na f.o.. Para tal consideramos as condições

$$S_1^* \geq 0, \quad S_2^* \geq 0 \quad \text{e} \quad S_3^* \geq 0.$$

Segue-se a obtenção de todos os intervalos de variação dos c_i pelas condições referidas.

c_1 : Para obter o intervalo de variação de c_1 substituímos em (1) todos os c_i pelos respectivos valores excepto c_1 (portanto $c_2 = 3$ e $c_3 = c_4 = c_5 = 0$)

nas condições $S_1^* \geq 0$, $S_2^* \geq 0$ e $S_3^* \geq 0$

$$\begin{aligned}
S_1^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 + \frac{11}{6} \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot 3 - \frac{1}{6} \cdot c_1 \geq 0 \Leftrightarrow 4 - \frac{1}{6} \cdot c_1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{6} \cdot c_1 \geq -4 \Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot c_1 \leq 4 \Leftrightarrow c_1 \leq 24 \\
S_2^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 - \frac{5}{6} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot 3 + \frac{1}{6} \cdot c_1 \geq 0 \Leftrightarrow -1 + \frac{1}{6} \cdot c_1 \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{1}{6} \cdot c_1 \geq 1 \Leftrightarrow c_1 \geq 6 \\
S_3^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 + 1 \cdot 0 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Obtemos então $6 \leq c_1 \leq 24$, ou seja, temos o intervalo

$$c_1 \in [6, 24]$$

ao qual pertence o valor original $c_1 = 7$ do problema.

c_2 : Para obter o intervalo de variação de c_2 substituímos em (1) todos os c_i pelos respectivos valores excepto c_2 (portanto $c_1 = 7$ e $c_3 = c_4 = c_5 = 0$) nas condições $S_1^* \geq 0$, $S_2^* \geq 0$ e $S_3^* \geq 0$

$$\begin{aligned}
S_1^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 + \frac{11}{6} \cdot 0 + \frac{4}{3} \cdot c_2 - \frac{1}{6} \cdot 7 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot c_2 - \frac{7}{6} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot c_2 \geq \frac{7}{6} \Leftrightarrow c_2 \geq \frac{7}{6} \cdot \frac{3}{4} \Leftrightarrow c_2 \geq \frac{7}{8} \\
S_2^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 - \frac{5}{6} \cdot 0 - \frac{1}{3} \cdot c_2 + \frac{1}{6} \cdot 7 \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{3} \cdot c_2 + \frac{7}{6} \geq 0 \\
&\Leftrightarrow -\frac{1}{3} \cdot c_2 \geq -\frac{7}{6} \Leftrightarrow \frac{1}{3} \cdot c_2 \leq \frac{7}{6} \Leftrightarrow c_2 \leq \frac{7}{6} \cdot 3 \Leftrightarrow c_2 \leq \frac{7}{2} \\
S_3^* &\geq 0 \Leftrightarrow -0 + 1 \cdot 0 \geq 0 \Leftrightarrow 0 \geq 0.
\end{aligned}$$

Obtemos então $7/8 \leq c_2 \leq 7/2$, ou seja, temos o intervalo

$$c_2 \in \left[\frac{7}{8}, \frac{7}{2}\right]$$

ao qual pertence o valor original $c_2 = 3$ do problema.

2.2 Intervalo de variação do termo independente b_j de cada restrição técnica

A partir do quadro óptimo do Simplex podemos retirar as relações

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{11}{6} \cdot b_1 - \frac{5}{6} \cdot b_2 + 1 \cdot b_3 \\ y &= \frac{4}{3} \cdot b_1 - \frac{1}{3} \cdot b_2 + 0 \cdot b_3 \\ x &= -\frac{1}{6} \cdot b_1 + \frac{1}{6} \cdot b_2 + 0 \cdot b_3, \end{aligned} \tag{2}$$

por leitura em linha das colunas relativas às restrições técnicas. Substituindo $b_1 = 10$, $b_2 = 20$ e $b_3 = 9/2$ em (2), obtemos a confirmação dos valores

$$s_3 = \frac{37}{6}, \quad y = \frac{20}{3} \quad \text{e} \quad x = \frac{5}{3}$$

(os elementos presentes na última coluna do quadro óptimo) das variáveis básicas na solução óptima. De facto,

$$\begin{aligned} s_3 &= \frac{11}{6} \cdot 10 - \frac{5}{6} \cdot 20 + 1 \cdot \frac{9}{2} = \frac{55}{3} - \frac{50}{3} + \frac{9}{2} = \frac{5}{3} + \frac{9}{2} = \frac{37}{6} \\ y &= \frac{4}{3} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} = \frac{40}{3} - \frac{20}{3} = \frac{20}{3} \\ x &= -\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{5}{3} + \frac{10}{3} = \frac{5}{3}. \end{aligned}$$

As expressões em (2) podem ser usadas para determinar os intervalos de variação dos termos independentes b_j das restrições técnicas. Para tal consideramos as restrições lógicas

$$s_3 \geq 0, \quad y \geq 0 \quad \text{e} \quad x \geq 0.$$

Segue-se a obtenção de todos os intervalos de variação dos b_j pelas condições referidas.

b_1 : Para obter o intervalo de variação de b_1 substituímos em (2) todos os b_j pelos respectivos valores excepto b_1 (portanto $b_2 = 20$ e $b_3 = 9/2$) nas condições $s_3 \geq 0$, $y \geq 0$ e $x \geq 0$

$$\begin{aligned} s_3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \cdot b_1 - \frac{5}{6} \cdot 20 + 1 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \cdot b_1 \geq \frac{50}{3} - \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{11 \cdot b_1}{6} \geq \frac{100-27}{6} \Leftrightarrow \frac{11 \cdot b_1}{6} \geq \frac{73}{6} \Leftrightarrow 11 \cdot b_1 \geq 73 \Leftrightarrow b_1 \geq \frac{73}{11} \\ y &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot b_1 - \frac{1}{3} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4 \cdot b_1}{3} \geq \frac{20}{3} \Leftrightarrow b_1 \geq 5 \\ x &\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \cdot b_1 + \frac{1}{6} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{b_1}{6} \geq -\frac{20}{6} \Leftrightarrow b_1 \leq 20. \end{aligned}$$

Obtemos então $73/11 \leq b_1 \leq 20$, ou seja, temos o intervalo

$$b_1 \in \left[\frac{73}{11}, 20\right]$$

ao qual pertence o valor original $b_1 = 10$ do problema. Existem limitações ao aumento e à diminuição de b_1 por ser activa a restrição R_1.

b_2 : Para obter o intervalo de variação de b_2 substituímos em (2) todos os b_j pelos respectivos valores excepto b_2 (portanto $b_1 = 10$ e $b_3 = 9/2$) nas condições $s_3 \geq 0$, $y \geq 0$ e $x \geq 0$

$$\begin{aligned} s_3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \cdot 10 - \frac{5}{6} \cdot b_2 + 1 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{5}{6} \cdot b_2 \geq -\frac{55}{3} - \frac{9}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{5}{6} \cdot b_2 \leq \frac{55}{3} + \frac{9}{2} \Leftrightarrow \frac{5 \cdot b_2}{6} \leq \frac{137}{6} \Leftrightarrow 5 \cdot b_2 \leq 137 \Leftrightarrow b_2 \leq \frac{137}{5} \\ y &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot b_2 + 0 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow -\frac{b_2}{3} \geq -\frac{40}{3} \Leftrightarrow b_2 \leq 40 \\ x &\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot b_2 + 0 \cdot \frac{9}{2} \geq 0 \Leftrightarrow \frac{b_2}{6} \geq \frac{10}{6} \Leftrightarrow b_2 \geq 10. \end{aligned}$$

Obtemos então $10 \leq b_2 \leq 137/5$, ou seja, temos o intervalo

$$b_2 \in \left[10, \frac{137}{5}\right]$$

ao qual pertence o valor original $b_2 = 20$ do problema. Existem limitações ao aumento e à diminuição de b_2 por ser activa a restrição R_2.

b_3 : Para obter o intervalo de variação de b_3 substituímos em (2) todos os b_j pelos respectivos valores excepto b_3 (portanto $b_1 = 10$ e $b_2 = 20$) nas condições $s_3 \geq 0$, $y \geq 0$ e $x \geq 0$

$$\begin{aligned} s_3 &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{11}{6} \cdot 10 - \frac{5}{6} \cdot 20 + 1 \cdot b_3 \geq 0 \Leftrightarrow b_3 \geq -\frac{55}{3} + \frac{50}{3} \Leftrightarrow b_3 \geq -\frac{5}{3} \\ y &\geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 20 + 0 \cdot b_3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{4}{3} \cdot 10 - \frac{1}{3} \cdot 20 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{20}{3} \geq 0 \\ x &\geq 0 \Leftrightarrow -\frac{1}{6} \cdot 10 + \frac{1}{6} \cdot 20 + 0 \cdot b_3 \geq 0 \Leftrightarrow \frac{10}{6} \geq 0. \end{aligned}$$

Obtemos então $b_3 \geq -5/3$, ou seja, temos o intervalo

$$b_3 \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty \right[$$

ao qual pertence o valor original $b_3 = 9/2$ do problema. Não existe limite para o aumento de b_3 por ser não-activa a restrição R_3.

3 Obtenção dos intervalos de variação com base na resolução gráfica

Os intervalos de variação encontrados acima podem ainda ser obtidos com base na resolução gráfica sempre que esta é possível (se o número n de variáveis de decisão é 2).

3.1 Intervalo de variação de cada coeficiente c_i da f.o.

A obtenção do intervalo em que pode variar cada coeficiente c_i na f.o., sem que o ponto óptimo $B(5/3, 20/3)$ se altere, deve garantir que o declive da recta que define a f.o. esteja compreendido entre os declives m_1 e m_2 das rectas de relaxamento das duas restrições activas R_1 e R_2, respectivamente. Os declives dessas rectas são

para a recta de R_1 : $m_1 = -2$ (pois $2x + y = 10 \Leftrightarrow y = -2x + 10$)

para a recta de R_2 : $m_2 = -8$ (pois $8x + y = 20 \Leftrightarrow y = -8x + 20$).

Note que se a recta que define a f.o. tivesse delive -2, além do ponto $B(5/3, 20/3)$, também seriam óptimos todos os pontos do segmento de recta $[AB]$, com $A\,(0, 10)$ (soluções óptimas múltiplas). Do mesmo modo, se a recta que define a f.o. tivesse delive -8, além do ponto $B(5/3, 20/3)$, também seriam óptimos todos os pontos do segmento de recta $[BC]$, com $C\,(49/22, 24/11)$ (soluções óptimas múltiplas).

Segue-se então a determinação dos intervalos de variação dos coeficientes das variáveis de decisão na f.o..

c_1 : A recta que define a f.o. é dada por $0 = c_1x + 3y$ (para $Z = 0$) tem agora o declive (variável)

$$m = -\frac{c_1}{3}$$

(para o valor original do problema $c_1 = 7$, temos $m = -7/3$). Para que o ponto óptimo continue a ser $B(5/3, 20/3)$, há que exigir

$$-8 \leq -\frac{c_1}{3} \leq -2 \Leftrightarrow -24 \leq -c_1 \leq -6 \Leftrightarrow 6 \leq c_1 \leq 24,$$

ou seja,

$$c_1 \in [6, 24]\,.$$

c_2 : A recta que define a f.o. é dada por $0 = 7x + c_2y$ (para $Z = 0$) tem agora o declive (variável)

$$m = -\frac{7}{c_2}$$

(para o valor original do problema $c_2 = 3$, temos $m = -7/3$). Note que $c_2 \neq 0$ pois, caso contrário, a recta que definiria a f.o. era vertical e o ponto óptimo não seria $B(5/3, 20/3)$ mas $C\,(49/22, 24/11)$. Para que o ponto óptimo continue a ser $B(5/3, 20/3)$, há que exigir

$$\begin{aligned} -8 \quad \leq \quad & -\frac{7}{c_2} \leq -2 \Leftrightarrow -\frac{7}{c_2} \geq -8 \;\wedge\; -\frac{7}{c_2} \leq -2 \Leftrightarrow \frac{7}{c_2} \leq 8 \;\wedge\; \frac{7}{c_2} \geq 2 \\ \Leftrightarrow \quad & 7 \leq 8c_2 \;\wedge\; 7 \geq 2c_2 \Leftrightarrow \frac{7}{8} \leq c_2 \;\wedge\; \frac{7}{2} \geq c_2 \Leftrightarrow \frac{7}{8} \leq c_2 \leq \frac{7}{2}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$c_2 \in \left[\frac{7}{8}, \frac{7}{2}\right].$$

Note que $c_2 > 0$ pois, caso contrário, a recta que definiria a a f.o. não tinha declive negativo e o ponto óptimo não seria $B(5/3, 20/3)$ mas $A(0, 10)$.

3.2 Intervalo de variação de cada termo independente b_j

A variação de um termo independente b_j das restrições técnicas implica um deslocamento paralelo (ascendente ou descendente) da recta de relaxamento da restrição R_j e uma consequente modificação da região admissível S. No entanto, o ponto óptimo apenas é deslocado se estiver sobre a recta de relaxamento de R_j, ou seja, se R_j for uma restrição activa. O deslocamento paralelo da recta de relaxamento permite o varrimento (ascendente ou descendente) do plano e, em geral, de parte da região admissível S. Conside-remos os seguintes casos distintos:

R_j **activa:** A obtenção do intervalo em que pode variar o termo independente b_j, sem que R_j deixe se ser activa, deve garantir que a recta do seu relaxamento (à qual pertence o ponto óptimo $B(5/3, 20/3)$) não atinge outro ponto de intersecção dos relaxamentos (que pode ser ou não ponto extremo da região admissível S), caso em que as restrições que definem esse ponto passariam a activas e R_j deixaria de o ser, quer quando se considera o aumento de b_j (a recta de relaxamento da restrição R_j sobe e o varrimento é ascendente) quer a diminuição de b_j (a recta de relaxamento da restrição R_j desce e o varrimento é descendente). Conhecidos os dois pontos dessas intersecções a "evitar" nos varrimentos, os valores limite inferior e superior do termo independente b_j são os obtidos por substituição das coordenadas desses pontos na expressão da recta de relaxamento da restrição R_j.

R_j **não-activa:** No caso de b_j ser o termo independente de uma restrição R_j não-activa (significa que existe uma folga $s_j \neq 0$ ou um excesso $t_j \neq 0$), o "risco" de ser atingido outro ponto de intersecção dos relaxamentos que altere as restrições activas só existe se o varrimento for efectuado num dos sentidos, ascendente (se a restrição R_j for de tipo $\geq$) ou descendente (se a restrição R_j for de tipo $\leq$). No varrimento segundo esse sentido é atingido o ponto óptimo por existir uma folga $s_j \neq 0$ (se a restrição R_j for de tipo $\leq$) ou um excesso $t_j \neq 0$ (se a restrição R_j for de tipo $\geq$). O valor limite de b_j, a partir do qual a restrição R_j passaria a activa e outra restrição deixaria de o ser, resulta de substituir as coordenadas do ponto óptimo $B(5/3, 20/3)$ na restrição R_j. No outro sentido não há modificação das restrições activas porque o ponto óptimo não é atingido nem é deslocado. Assim, o termo independente b_j de uma restrição não-activa apenas tem limite ao seu aumento (se a restrição R_j for de tipo $\geq$) ou limite à sua diminuição (se a restrição R_j for de tipo $\leq$).

Segue-se então a determinação dos intervalos de variação dos termos independentes.

b_1 : A restrição técnica R_1 é activa, passa a ser definida por

$$2x + y \leq b_1$$

e a sua recta de relaxamento é $y = -2x + b_1$. Ao varrimento ascendente através da recta $y = -2x + b_1$ correspondem valores de b_1 superiores a 10 (e aumento da região admissível S) e ao varrimento descendente correspondem valores de b_1 inferiores a 10 (e diminuição da região admissível S).

No varrimento ascendente é encontrado o ponto $(0, 20)$ sobre a recta de relaxamento de $x \geq 0$ quando $b_1 = 20$. Como tal $b_1 \leq 20$ pois, caso contrário ($b_1 > 20$) a restrição R_1 deixaria de ser activa (as restrições activas passariam a ser R_2 e $x \geq 0$). Verifica-se que este limite superior $b_1 = 20$ do termo independente b_1 pode ser obtido pela substituição do ponto $(0, 20)$ na recta de relaxamento $y = -2x + b_1$,

$$20 = -2 \cdot 0 + b_1 \Leftrightarrow b_1 = 20.$$

No varrimento descendente é encontrado o ponto $C\,(49/22, 24/11)$ sobre a recta de relaxamento de R_3. Há que determinar o valor de b_1 nesse ponto C, abaixo do qual a restrição R_1 deixaria de ser activa e a restrição R_3 passaria a sê-lo (as restrições activas passariam a ser R_2 e R_3). Para tal, substitui-se o ponto C na recta de relaxamento $y = -2x + b_1$,

$$\frac{24}{11} = -2 \cdot \frac{49}{22} + b_1 \Leftrightarrow \frac{24}{11} = -\frac{49}{11} + b_1 \Leftrightarrow b_1 = \frac{24}{11} + \frac{49}{11} = \frac{73}{11},$$

e $b_1 = 73/11$ é o limite inferior do termo independente b_1. Temos então

$$b_1 \in \left[\frac{73}{11}, 20\right].$$

Note que no estudo da variação de b_1 nunca está em "risco" R_2 deixar de ser activa.

b_2 : A restrição técnica R_2 é activa, passa a ser definida por

$$8x + y \leq b_2$$

e a sua recta de relaxamento é $y = -8x + b_2$. Ao varrimento ascendente através da recta $y = -8x + b_2$ correspondem valores de b_2 superiores a 20 (e aumento da região admissível S) e ao varrimento descendente correspondem valores de b_2 inferiores a 20 (e diminuição da região admissível S).

No varrimento ascendente é encontrado o ponto $(29/10, 21/5)$ sobre as rectas $2x + y = 10$ e $3x - y = 9/2$ de relaxamento de R_1 e R_3. Há que determinar o valor de b_2 nesse ponto, acima do qual a restrição R_2 deixaria de ser activa e a restrição R_3 passaria a sê-lo (as restrições activas passariam a ser R_1 e R_3). Para tal, substitui-se o ponto $(29/10, 21/5)$ na recta de relaxamento $y = -8x + b_2$,

$$\frac{21}{5} = -8 \cdot \frac{29}{10} + b_2 \Leftrightarrow \frac{21}{5} = -\frac{116}{5} + b_2 \Leftrightarrow b_2 = \frac{21}{5} + \frac{116}{5} = \frac{137}{5},$$

e $b_1 = 137/5$ é o limite superior do termo independente b_2.

No varrimento descendente é encontrado o ponto $A\,(0, 10)$ sobre a recta de relaxamento de $x \geq 0$ quando $b_2 = 10$. Como tal $b_2 \geq 10$ pois, caso contrário ($b_2 < 10$) a restrição R_2 deixaria de ser activa (as restrições activas passariam a ser R_1 e $x \geq 0$). Verifica-se que este limite inferior $b_2 = 10$ do termo independente b_2 pode ser obtido pela substituição do ponto $(0, 10)$ na recta de relaxamento $y = -8x + b_2$,

$$10 = -8 \cdot 0 + b_2 \Leftrightarrow b_2 = 10.$$

Temos então

$$b_2 \in \left[10, \frac{137}{5}\right].$$

Note que no estudo da variação de b_2 nunca está em "risco" R_1 deixar de ser activa.

b_3 : A restrição técnica R_3 é não-activa, passa a ser definida por

$$3x - y \leq b_3$$

e a sua recta de relaxamento é $y = 3x - b_3$. Ao varrimento ascendente através da recta $y = 3x - b_3$ correspondem valores de b_3 inferiores a $9/2$ ($\Rightarrow -b_3 > -9/2$) (e diminuição da região admissível S) e ao varrimento descendente correspondem valores de b_3 superiores a $9/2$ ($\Rightarrow -b_3 < -9/2$) (e aumento da região admissível S).

No varrimento descendente as restrições activas R_1 e R_2 manter-se-ão sempre como tal, pois o ponto óptimo não é deslocado. Como tal mantêm-se as restrições activas mesmo que b_3 aumente indefinidamente a partir de $9/2$. Não existe, portanto, limite ao aumento do termo independente b_3.

No varrimento ascendente é encontrado o ponto óptimo $B\,(5/3, 20/3)$ sobre as rectas de relaxamento de R_1 e R_2. Há que determinar o valor de b_3 nesse ponto, abaixo do qual a restrição R_3 passaria a ser activa e a restrição R_2 deixaria de sê-lo (as restrições activas passariam a ser R_1 e R_3). Para tal, substitui-se o ponto B na recta de relaxamento $y = 3x - b_3$,

$$\frac{20}{3} = 3 \cdot \frac{5}{3} - b_3 \Leftrightarrow b_3 = 5 - \frac{20}{3} = -\frac{5}{3},$$

e $b_3 = 137/5$ é o limite inferior do termo independente b_3. Temos então

$$b_3 \in \left[-\frac{5}{3}, +\infty\right[.$$

4 Consequências no ponto óptimo e no valor óptimo das variações permitidas

4.1 Com a variação de cada coeficiente c_i da f.o.

Dentro da variação permitida para cada coeficiente c_i, não há alteração do ponto óptimo (nem obviamente quais das restrições são ou não activas) mas o valor óptimo é alterado.

No exemplo que está a ser considerado, temos:

c_1 : Para todos os valores $c_1 \in [6, 24]$ há a garantia de que o ponto óptimo ainda é $B(5/3, 20/3)$. No entanto, é evidente que se altera o valor óptimo (pois o coeficiente c_1 da f.o. está a variar) que passa a ser dado em função de c_1 pela expressão

$$Z = c_1 \cdot \frac{5}{3} + 3 \cdot \frac{20}{3} = \frac{5}{3} \cdot c_1 + 20.$$

Para diferentes valores de c_1 são obtidos diferentes valores óptimos do problema. Com $c_1 = 6$ obtem-se o menor lucro possível

$$Z = \frac{5}{3} \cdot 6 + 20 = 30$$

e com $c_1 = 24$ obtem-se o maior lucro possível

$$Z = \frac{5}{3} \cdot 24 + 20 = 60,$$

correspondentes ao mesmo ponto óptimo $B(5/3, 20/3)$, ou seja, à mesma produção. Note que o lucro óptimo $Z = 95/3$ tem valor entre lucro máximo 30 e o lucro mínimo 60.

c_2 : Para todos os valores $c_2 \in [7/8, 7/2]$ há a garantia de que o ponto óptimo ainda é $B(5/3, 20/3)$. No entanto, é evidente que se altera o valor óptimo (pois o coeficiente c_2 da f.o. está a variar) que passa a ser dado em função de c_2 pela expressão

$$Z = 7 \cdot \frac{5}{3} + c_2 \cdot \frac{20}{3} = \frac{35}{3} + \frac{20}{3} \cdot c_2.$$

Para diferentes valores de c_2 são obtidos diferentes valores óptimos do problema.

4.2 Com a variação do termo independente b_j de cada restrição técnica

Dentro da variação permitida para cada termo independente b_j, apenas há alteração do ponto óptimo (sem alterar quais das restrições são ou não activas) e do valor óptimo se a restrição R_j for activa. Caso contrário, não há alteração.

No exemplo que está a ser considerado, temos:

b_1 : Para todos os valores $b_1 \in [73/11, 20]$ há a garantia de que as restrições activas R_1 e R_2 se mantêm mas as coordenadas do ponto óptimo são agora função de b_1. As expressões de cada uma das coordenadas resultam da resolução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = b_1 \\ \\ 8x + y = 20 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ---- \\ \\ y = 20 - 8x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + 20 - 8x = b_1 \\ \\ ----- \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{20 - b_1}{6} \\ \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{10}{3} - \dfrac{b_1}{6} \\ \\ y = \dfrac{4b_1}{3} - \dfrac{20}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o ponto óptimo é

$$\left(\frac{10}{3} - \frac{b_1}{6}, \frac{4b_1}{3} - \frac{20}{3} \right),$$

ao qual corresponde o valor óptimo

$$Z = 7 \left(\frac{10}{3} - \frac{b_1}{6} \right) + 3 \left(\frac{4b_1}{3} - \frac{20}{3} \right) = \frac{70 - 60}{3} - \frac{7b_1}{6} + \frac{12b_1}{3} = \frac{10}{3} + \frac{17b_1}{6}.$$

Para diferentes valores de b_1 são obtidos diferentes pontos óptimos e diferentes valores óptimos do problema. Por exemplo, para $b_1 = 16 \in [73/11, 20]$, obtemos o ponto óptimo e o valor óptimo através das expressões anteriores,

$$\text{ponto óptimo: } \left(\frac{10}{3} - \frac{16}{6}, \frac{4 \cdot 16}{3} - \frac{20}{3} \right) = \left(0, \frac{44}{3} \right) = \left(\frac{2}{3}, \frac{44}{3} \right)$$

$$\text{valor óptimo: } Z = \frac{10}{3} + \frac{17 \cdot 16}{6} = \frac{10}{3} + \frac{136}{3} = \frac{146}{3},$$

que são respectivamente, uma nova produção e um novo lucro. Note que as coordenadas x e y do ponto óptimo também seguem das relações (2) com $b_1 = 16$ e b_2 e b_3 com os valores originais do problema

$$\begin{aligned} y &= \frac{4}{3} \cdot 16 - \frac{1}{3} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} = \frac{64}{3} - \frac{20}{3} = \frac{44}{3} \\ x &= -\frac{1}{6} \cdot 16 + \frac{1}{6} \cdot 20 + 0 \cdot \frac{9}{2} = -\frac{8}{3} + \frac{10}{3} = \frac{2}{3}. \end{aligned}$$

b_2 : Para todos os valores $b_2 \in [10, 137/5]$ há a garantia de que as restrições activas R_1 e R_2 se mantêm mas as coordenadas do ponto óptimo são agora função de b_2. As expressões de cada uma das coordenadas resultam da resolução do sistema

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ \\ 8x + y = b_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 10 - 2x \\ \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} ----- \\ \\ 8x + 10 - 2x = b_2 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b_2 - 10}{6} \\ \\ ----- \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{b_2}{6} - \dfrac{5}{3} \\ \\ y = \dfrac{40}{3} - \dfrac{b_2}{3} \end{cases}.$$

Portanto, o ponto óptimo é

$$\left(\frac{b_2}{6} - \frac{5}{3}, \frac{40}{3} - \frac{b_2}{3} \right),$$

ao qual corresponde o valor óptimo

$$Z = 7\left(\frac{b_2}{6} - \frac{5}{3} \right) + 3\left(\frac{40}{3} - \frac{b_2}{3} \right) = \frac{120 - 35}{3} + \frac{7b_2}{6} - b_2 = \frac{85}{3} + \frac{b_2}{6}.$$

Para diferentes valores de b_2 são obtidos diferentes pontos óptimos e diferentes valores óptimos do problema.

b_3 : Para todos os valores $b_3 \in [-5/3, +\infty[$ há a garantia de que as restrições activas R_1 e R_2 se mantêm assim como as coordenadas do ponto óptimo, dadas pelos relaxamentos das restrições activas

$$\begin{cases} 2x + y = 10 \\ \\ 3x - y = b_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = \dfrac{20}{3} \\ \\ x = \dfrac{5}{3} \end{cases}.$$

Como tal, também se mantém o valor óptimo $Z = 95/3$.