ISCTE Business School
Instituto Universitário de Lisboa

Trabalho de Grupo

Matemática

1º Semestre

Professor Doutor José Filipe Bonito

Grupo 9

Carolina Correia nº 68699
Inês Tomé nº 68581
Maria Patrocínio nº 68557
Nuno Ponceano nº 68483

Exercício 1:

1. Seja E = {e1; e2} o conjunto de estados que caracterizam as condições de mercado da empresa *A*, onde *e*1 corresponde ao mercado no estado *bom* e *e*2 corresponde ao mercado no estado *mau*. Seja:

$$p_A\ (t) = \begin{bmatrix} pA(e1 \mid T = t) \\ pA(e2 \mid T = t) \end{bmatrix}$$

a probabilidade de se verificar cada um dos estados no momento *T* = *t*, onde *T* é a variável de tempo. Sabe-se que no momento inicial a probabilidade do mercado estar no estado bom ou no estado mau é a seguinte:

p_A (e1 | T = 0) = 0.,4 ; p_A (e2 |T = 0) = 0.6

O vetor de probabilidades dos estados no momento inicial é dado por:

$$p_A(0) = \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix}$$

A transição entre os estados da empresa *A* do momento *t* para o momento (*t*+1) é caracterizada por um *Processo de Markov* com a seguinte *matriz de transição*:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix}$$

(a) Calcule o vetor de probabilidades dos estados em *t* = 1.

Para calcular o vetor das probabilidades dos estados em $t = 1$ temos de efetuar uma multiplicação de duas matrizes. Neste caso, vamos multiplicar a matriz transição do estado da empresa A, do momento t para o momento $(t+1)$ pelo vetor das probabilidades dos estados no momento inicial. Terá de se efetuar uma pós multiplicação de $p_A(0)$ dado que, no caso de se efetuar o processo contrário, a multiplicação trona-se impossível.

Regra da Multiplicação de Matrizes: Para se poder multiplicar duas matrizes é necessário que o número de colunas da primeira matriz seja igual ao número de linhas da segunda matriz.

$$P_A(1) = P_A \times p_A(0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A(1) = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A(1) = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$$

Para se obter o valor da entrada de uma matriz que resulta da multiplicação de duas matrizes, tem de se multiplicar a linha de uma matriz pela coluna de outra matriz.

Cálculo Auxiliar:

$$(0{,}4 \times 0{,}4) + (0{,}9 \times 0{,}6) = 0{,}16 + 0{,}54 = 0{,}7$$
$$(0{,}6 \times 0{,}1) + (0{,}1 \times 0{,}6) = 0{,}24 + 0{,}06 = 0{,}3$$

O vetor das probabilidades dos estados no momento $t = 1$ é dado pela seguinte matriz coluna.

$$P_A(1) = \begin{bmatrix} 0{,}7 \\ 0{,}3 \end{bmatrix}$$

$$p_A(e_1|T = 1) = 0{,}7$$
$$p_A(e_2|T = 1) = 0{,}3$$

b) **Calcule as potências de P_A de modo a verificar que essas potências convergem para uma matriz constante. Indique essa matriz e interprete o resultado.**

Para encontrar a matriz constante temos de efetuar a potência da matriz P_A até encontrar uma matriz em que as entradas tendam a estabilizar, ou seja, comecem a apresentar um valor aproximadamente constante.

Regra da potenciação de matrizes: Só se pode falar de potenciação de matrizes quando se tratam de matrizes quadradas, ou seja, matrizes em que o número de linhas seja igual ao número de colunas.

$$P_A^2 = P_A \times P_A \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}1 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^2 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}55 \end{bmatrix}$$

$$P_A^4 = P_A^2 \times P_A^2 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^4 = \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}55 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}7 & 0{,}45 \\ 0{,}3 & 0{,}55 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^4 = \begin{bmatrix} 0{,}625 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 \end{bmatrix}$$

$$P_A^8 = P_A^4 \times P_A^4 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^8 = \begin{bmatrix} 0{,}625 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}625 & 0{,}5625 \\ 0{,}375 & 0{,}4375 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^8 = \begin{bmatrix} 0{,}601563 & 0{,}597656 \\ 0{,}398438 & 0{,}402344 \end{bmatrix}$$

$$P_A^{16} = P_A^8 \times P_A^8 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^{16} = \begin{bmatrix} 0{,}601563 & 0{,}597656 \\ 0{,}398438 & 0{,}402344 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}601563 & 0{,}597656 \\ 0{,}398438 & 0{,}402344 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^{16} = \begin{bmatrix} 0{,}600007 & 0{,}599991 \\ 0{,}399995 & 0{,}40001 \end{bmatrix}$$

$$P_A^{32} = P_A^{16} \times P_A^{16} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^{32} = \begin{bmatrix} 0{,}60001 & 0{,}59999 \\ 0{,}4 & 0{,}400012 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}60001 & 0{,}59999 \\ 0{,}4 & 0{,}400012 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow P_A^{32} = \begin{bmatrix} 0{,}600002 & 0{,}600001 \\ 0{,}400002 & 0{,}400001 \end{bmatrix}$$

Como se pode verificar pela potenciação de P_A^{16} e P_A^{32}, as entradas de ambas as matrizes apresentam valores mais ou menos próximos uns dos outros, assim, podemos concluir que as diferentes potências de P_A convergem para uma matriz constante, que podemos designar por P_A^n.

$$P_A^n \simeq P_A^{32} = \begin{bmatrix} 0{,}600002 & 0{,}600001 \\ 0{,}400002 & 0{,}400001 \end{bmatrix}$$

Em conclusão, podemos dizer que por maior que seja o valor da potência de P_A, as diferentes entradas da matriz obtida tendem a convergir numa matriz que apresenta valores muitos próximos daqueles que obtivemos em P_A^{32}.
Neste caso, como P_A é uma matriz que representa a transição entre os estados da empresa A do momento t para o momento $(t+1)$, podemos dizer que, a partir de um certo momento, a matriz da transição vai apresentar entradas com valores mais ou menos constantes e próximos daqueles que obtivemos em P_A^{32}.

Nota: A soma dos diferentes valores de uma coluna deve dar 1, porém devido a arredondamentos efetuados pelo Excel o valor é aproximadamente 1.

c) **Indique a expressão da matriz de transição do momento t para o momento $(t+n)$. Compare o resultado obtido com o da alínea b).**
(Utiliza a diagonalização de P_A para justificar a resposta).

Para se obter a matriz transição do momento t para o momento $(t+n)$ temos de calcular a matriz P_A^n através dos valores e vetores próprios de P_A.

Definição para calcular os valores próprios: $|P_A - \lambda I| = 0$

Valores próprios

$$|P_A - \lambda I| = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 0{,}4-\lambda & 0{,}9 \\ 0{,}6 & 0{,}1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (0{,}4-\lambda)(0{,}1-\lambda) - 0{,}6 \times 0{,}9 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 - 0{,}5\lambda - 0{,}5 = 0$$

Utilizando a fórmula resolvente chegamos a seguinte conclusão:

$$\lambda = 1 \vee \lambda = -0{,}5$$

Em ambos os valores próprios a multiplicidade algébrica é igual a 1, ou seja, $m.a. = 1$ para $\lambda = 1 \vee \lambda = -0{,}5$.

Vetores próprios

$\underline{\lambda = 1}$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0{,}4-\lambda & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}1-\lambda & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 0{,}4-1 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}1-1 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc:c} -0{,}6 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & -0{,}9 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} -0{,}6 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} -0{,}6\, v_1 + 0{,}9 v_2 = 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} v_1 = 1{,}5 v_2 \\ v_2 = v_2 \end{cases}$$

$$\{\vec{v} = (v_1, v_2) = v_2(1{,}5; 1)\} \qquad m.g. = 1$$

$\underline{\lambda = -0{,}5}$

$$\left[\begin{array}{cc:c} 0{,}4-\lambda & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}1-\lambda & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 0{,}4+0{,}5 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}1+0{,}5 & 0 \end{array}\right] \to$$

$$\to \left[\begin{array}{cc:c} 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0{,}6 & 0{,}6 & 0 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc:c} 0{,}9 & 0{,}9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} 0{,}9\, v_1 + 0{,}9 v_2 = 0 \\ 0 \end{cases} \Leftrightarrow \cdots \Leftrightarrow \begin{cases} v_2 = -v_1 \\ v_1 = v_1 \end{cases}$$

$$\{\vec{v} = (v_1, v_2) = v_1(1; -1)\} \qquad m.g. = 1$$

Visto que, para cada valor próprio de P_A a multiplicidade algébrica é igual à multiplicidade geométrica $(m.a = m.g = 1)$ a matriz é diagonalizável e por isso, os seus valores correspondem aos valores próprios obtidos:

$$D = Q^{-1} \times P_A \times Q \iff$$
$$\iff D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -0{,}5 \end{bmatrix}$$

Para descobrir a expressão da matriz de transição do momento t para o momento $(t+n)$, temos de fazer a potência de n de P_A, assim:

$$D = Q^{-1} \times P_A \times Q \iff$$
$$\iff D^n = Q^{-1} \times {P_A}^n \times Q \iff$$
$$\iff P_A^n = Q \times D^n \times Q^{-1} \iff$$
$$\iff P_A^n = \begin{bmatrix} 1{,}5 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & -0{,}5^n \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix} \iff$$
$$\iff P_A^n = \begin{bmatrix} 0{,}6 - 0{,}5^n \times 0{,}4 & 0{,}6 - 0{,}5^n \times 0{,}6 \\ 0{,}4 + 0{,}5^n \times 0{,}4 & 0{,}4 + 0{,}5^n \times 0{,}6 \end{bmatrix}$$

Visto que:

$$\lim_{n \to \infty} -0{,}5^n \times 0{,}4 = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} -0{,}5^n \times 0{,}6 = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} 0{,}5^n \times 0{,}4 = 0$$
$$\lim_{n \to \infty} 0{,}5^n \times 0{,}6 = 0$$

$$P_A^n = \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix}$$

Como podemos verificar a matriz obtida é semelhante àquela que obtivemos na alínea anterior, dado que, em ambos os casos foi feita a potenciação da matriz P_A , mas de formas diferentes.
Como seria de esperar as matrizes obtidas apresentam entradas com valores semelhantes.

<u>Cálculo Auxiliar:</u>
Para calcular a inversa fazemos a matriz ampliada de Q com a matriz identidade.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1{,}5 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1{,}5 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2{,}5 & -1 & 1{,}5 \end{array}\right] \to$$
$$\to \left[\begin{array}{cc|cc} 3{,}75 & 0 & 1{,}5 & 1{,}5 \\ 0 & -2{,}5 & -1 & 1{,}5 \end{array}\right] \to \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0 & 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}\right]$$
$$Q^{-1} = \begin{bmatrix} 0{,}4 & 0{,}4 \\ 0{,}4 & 0{,}6 \end{bmatrix}$$

d) Qual é o estado estacionário do vetor probabilidades dos estados? Interprete o resultado obtido de acordo com os valores próprios.

O vetor probabilidades dos estados é o vetor único da matriz P_A e é, também, um vetor próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$, para este caso será $(1{,}5; 1)$. Sendo um vetor de probabilidades, a soma das suas coordenadas devem somar 1 (100%) , como pressupõe a teoria da cadeia de Markov.

$$1{,}5v_2 + v_2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 2{,}5\, v_2 = 1 \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v_2 = \frac{1}{2{,}5} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow v_2 = 0{,}4$$
$$v_1 = 1{,}5 \times 0{,}4 = 0{,}6$$

O vetor de probabilidades do estado é $\begin{bmatrix} 0{,}6 \\ 0{,}4 \end{bmatrix}$. Como seria de esperar, a matriz obtida coincide com ambas as colunas da matriz obtida na alínea b). Este vetor representa o comportamento dos dois estados (estado bom e estado mau) a longo prazo.

e) Suponha agora que os *ganhos* da empresa A no estado e_1 são 1 e no estado e_2 são -1, i.e.,

$$g_A(e_1) = 1 \quad g_A(e_2) = -1$$

Seja g_A = $[1 \quad -1]$. O *valor esperado dos ganhos em cada momento t* calcula-se da seguinte forma:

$E\ (G_A\ |T\ =\ t)\ =\ g_A\ (e_1)\, p_A\ (e_1\ |T\ =\ t)\ +\ g_A\ (e_2)\, p_A\ (e_2\ |\ T\ =\ t)$, onde G_A representa os ganhos da empresa *A*

(i) Escreva $E(G_A \mid T = t)$ como o produto de vetores.

$$[G_A(e_1) \quad G_A(e_2)] \times \begin{bmatrix} P_A(e_1|T=t) \\ P_A(e_2|T=t) \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G_A(e_1) \times P_A(e_1|T=t) + G_A(e_2) \times P_A(e_2|T=t)$$

(ii) Calcule a expressão de $E(G_A \mid T = t)$.

Com esta expressão conseguimos obter os ganhos da empresa A para o momento t, pelo que temos de multiplicar a matriz dos ganhos da empresa no estado e_1 e e_2 pela matriz que representa a transição entre os estados do momento t para o momento $(t+n)$ e pelo vetor das probabilidades dos estados no momento inicial.

$$E(G_A \mid T = t) = G_A \times P_A^n \times p_A(0) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E(G_A \mid T = t) = [1 \quad -1] \times \begin{bmatrix} 0{,}6 & 0{,}6 \\ 0{,}4 & 0{,}4 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E(G_A \mid T = t) = [0{,}2 \quad 0{,}2] \times \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow E(G_A \mid T = t) = [0{,}2]$$

O valor esperado para os ganhos da empresa A no momento t é de 0,2.

Exercício 2

2. Existe uma empresa *B* cujas condições de mercado estão associadas às condições de mercado da empresa *A*. Seja *PB* = [*bij*], onde *bij* representa a probabilidade do estado da empresa *B* ser *ei* quando o estado da empresa *A* é *ej* (*i; j* = 1*;* 2). A matriz é dada por:

$$P_B = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix}$$

a) Qual o vetor de probabilidades dos estados na empresa *B* no momento inicial?

Para se obter a probabilidade dos estados da empresa B temos de efetuar a multiplicação da matriz das probabilidades da empresa B pelo vetor de probabilidades do estados no momento inicial da empresa A, tendo em conta que a empresa B é influenciada pela empresa A.

$$P_B \times P_A(0) = \begin{bmatrix} 0{,}2 & 0{,}7 \\ 0{,}8 & 0{,}3 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}4 \\ 0{,}6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix}$$

Cálculo Auxiliar:

$$(0{,}2 \times 0{,}4) + (0{,}7 \times 0{,}6) = 0{,}08 + 0{,}42 = 0{,}5$$
$$(0{,}8 \times 0{,}4) + (0{,}3 \times 0{,}6) = 0{,}32 + 0{,}18 = 0{,}5$$

Na resolução deste exercício recorremos ao mesmo raciocínio que utilizámos no exercício 1 a).

b) Considere que os ganhos da empresa *B* em cada um dos estados são dados por:

$$g_B(e_1) = \frac{1}{2} \qquad g_B(e_2) = -\frac{2}{3}$$

Seja $g_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

(i) Calcule o valor esperado dos ganhos da empresa *B* no momento inicial, i.e., $G_B(0)$.

$$G_B(0) = g_B \times P_B(0)$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 0{,}5 \\ 0{,}5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{12} \end{bmatrix}$$

Cálculo Auxiliar:

$$\left(\frac{1}{2} \times 0{,}5\right) + \left(-\frac{2}{3} \times 0{,}5\right) = -\frac{1}{12}$$

(ii) Calcule a expressão do valor esperado dos ganhos da empresa B no momento t, i.e., $G_B(t)$.
(Não é necessário fazer os cálculos).

$$G_B(t) = g_B . P_B \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow G_B(t) = g_B \times P_B(0) \times {P_A}^t \times P_A(0)$$

Para calcular os ganhos da empresa B temos de multiplicar o g_B pela probabilidade dos estados e_1 e e_2 , ou seja, o estado bom e o estado mau. Como a probabilidade dos estados da empresa B é afetada pela probabilidade dos estados da empresa A, podemos dizer que P_B = $P_B(0) \times {P_A}^t \times P_A(0)$.