

Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Novembro 2014

Trabalho de grupo

1. Seja $E = \{e_1, e_2\}$ o conjunto de estados que caracterizam as condições de mercado da empresa A , onde e_1 corresponde ao mercado no estado *bom* e e_2 corresponde ao mercado no estado *mau*. Seja

$$p_A(t) = \begin{bmatrix} p_A(e_1|T=t) \\ p_A(e_2|T=t) \end{bmatrix},$$

a probabilidade de se verificar cada um dos estados no momento $T = t$, onde T é a variável de tempo. Sabe-se que no momento inicial a probabilidade do mercado estar no estado bom ou no estado mau é a seguinte:

$$p_A(e_1|T=0) = 0.4, \quad p_A(e_2|T=0) = 0.6.$$

O vetor de probabilidades dos estados no momento inicial é dado por:

$$p_A(0) = \begin{bmatrix} 0.5 \\ 0.5 \end{bmatrix}.$$

A transição entre os estados da empresa A do momento t para o momento $(t+1)$ é caracterizada por um *Processo de Markov* com a seguinte *matriz de transição*:

$$P_A = \begin{bmatrix} 0.2 & 0.4 \\ 0.8 & 0.6 \end{bmatrix}.$$

- (a) Calcule o vetor de probabilidades dos estados em $t = 1$.
- (b) Calcule potências de P_A de modo a verificar que essas potências convergem para uma matriz constante. Indique essa matriz e interprete o resultado.
- (c) Indique a expressão da matriz de transição do momento t para o momento $(t+n)$. Compare o resultado obtido com a alínea (b).
(Utilize a diagonalização de P_A para justificar a resposta)
- (d) Qual é o estado estacionário do vetor de probabilidades dos estados? Interprete o resultado obtido de acordo com os valores e vetores próprios.

- (e) Suponha agora que os *ganhos* da empresa A no estado e_1 são 1 e no estado e_2 são -1 , i.e.,

$$g_A(e_1) = 1, \quad g_A(e_2) = -1.$$

Seja $g_A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix}$. O *valor esperado dos ganhos em cada momento t* calcula-se da seguinte forma:

$$E(G_A|T = t) = g_A(e_1)p_A(e_1|T = t) + g_A(e_2)p_A(e_2|T = t),$$

onde G_A representa os ganhos da empresa A .

- (i) Escreva $E(G_A|T = t)$ como o produto de vetores.
 - (ii) Calcule a expressão de $E(G_A|T = t)$.
2. Existe uma empresa B cujas condições de mercado estão associadas às condições de mercado da empresa A . Seja $P_B = [b_{ij}]$, onde b_{ij} representa a probabilidade do estado da empresa B ser e_i quando o estado da empresa A é e_j ($i, j = 1, 2$). A matriz é dada por:

$$P_B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 \\ 0.5 & 0.8 \end{bmatrix}.$$

- (a) Qual o vetor de probabilidades dos estados na empresa B no momento inicial?
- (b) Considere que os ganhos da empresa B em cada um dos estados são dados por:

$$g_B(e_1) = \frac{1}{2}, \quad g_B(e_2) = -\frac{2}{3}.$$

Seja $g_B = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$.

- (i) Calcule o valor esperado dos ganhos da empresa B no momento inicial, i.e., $G_B(0)$.
- (ii) Calcule a expressão do valor esperado dos ganhos da empresa B no momento t , i.e., $G_B(t)$.
(Não é necessário fazer os cálculos)