ISCTE - IUL

Matemática

Licenciaturas em Gestão, Gestão de Marketing, Finanças e Contabilidade,
Gestão Industrial e Logística

15 de Novembro de 2014

Ano Lectivo 2014/2015, 1º semestre

Tipo de prova: 1º Teste

Duração: 1h15 (+15m)

Nome do aluno:

Número do aluno:

Turma:

Docente:

Observações:

1. A prova deve ser efectuada sem consulta e sem a utilização de máquina de calcular.
2. Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
3. Não destaque as folhas do teste.
4. Apresente todas as justificações necessárias.
5. Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.
6. Durante a prova o telemóvel deve estar desligado.
7. Não se tiram dúvidas durante a prova.

Cotações:

1.	a)	3.	a)
	b)		b)
	c)		c)
	d)	4.	a)
2.	a)		b)
	b)	5.	
	c)		

---

1. Considere o sistema de equações lineares de incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} -x - y + az = 0 \\ x + 2y + (1-a)z = -1 \\ 2x + y + z = b^2 \end{cases}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(1.0 val.) (a) Escreva o sistema na forma matricial $AX = B$.

$$\begin{bmatrix} -1 & -1 & a \\ 1 & 2 & 1-a \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ b^2 \end{bmatrix}$$

(2.0 val.) (b) Discuta a natureza do sistema, em função dos parâmetros a e b, pelo método de eliminação de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & a & 0 \\ 1 & 2 & 1-a & -1 \\ 2 & 1 & 1 & b^2 \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 + 2L_1]{L_2 \to L_2 + L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2a+1 & b^2 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow[L_3 \to L_3 + L_2]{} \left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 2a+2 & b^2-1 \end{array}\right]$$

- se $a \neq -1$, $\forall b \in \mathbb{R}$ $\Rightarrow$ SPD
- se $a = -1$ e $b = 1$ $\Rightarrow$ SPI
- se $a = -1$ e $b = -1$ $\Rightarrow$ SPI
- se $a = -1$ e $b \neq 1$ $\Rightarrow$ SI
- se $a = -1$ e $b \neq -1$ $\Rightarrow$ SI

(2.0 val.) (c) Determine para que valores de a a matriz dos coeficientes A é invertível. Para $a = 0$ determine A^{-1}.

De b) vem que A é invertível se $a \neq -1$

$\boxed{a=0}$

$$A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

(1.5 val.) (d) Seja $a = b = 0$. Determine a solução do sistema $AX = B$ usando a alínea (c).

Para $a = 0$ o sistema é possível e determinado.

Logo $X = A^{-1} \cdot B$

$$X = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/2 & 1/2 \\ -1/2 & 1/2 & -1/2 \\ 3/2 & 1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

Sol. do sistema $(x, y, z) = \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right)$

2. Seja

$$V = \text{span}\{(1,1,1),(2,0,1),(0,2,1)\}.$$

(1.5 val.) (a) Determine uma base de V.

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow[L_3 \to L_3 - L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{L_3 \to L_3 - \frac{1}{2}L_2} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad r(A) = 2$$

Os vectores $(1,1,1),(2,0,1),(0,2,1)$ são L.D.

e $\text{Span}\{(1,1,1),(2,0,1),(0,2,1)\} = \text{Span}\{(1,1,1),(2,0,1)\}$

Base de V $\{(1,1,1),(2,0,1)\}$

(1.5 val.) (b) Mostre que o vetor $(1,1,0)$ não pertence a V.

Vejamos se existem $a, b \in \mathbb{R}$:

$$(1,1,0) = a(1,1,1) + b(2,0,1)$$

$$\Leftrightarrow \quad (1,1,0) = (a+2b, a, a+b)$$

$$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} 1 = a+2b \\ 1 = a \\ 0 = a+b \end{cases} \qquad \begin{cases} 1 = -1 \\ a = 1 \\ b = -1 \end{cases} \qquad \text{Sistema Impossível}$$

Logo $(1,1,0) \notin V$

(1.5 val.) (c) Usando as alíneas anteriores, indique, justificando, uma base de $\mathbb{R}^3$.

De b) sabemos que $(1,1,0) \notin V$, i.e., não se escreve como C.L. dos vectores $(1,1,1)$, $(2,0,1)$ logo os vectores $\{(1,1,1),(2,0,1),(1,1,0)\}$ são L.I. e geram $\mathbb{R}^3$ ($\dim \mathbb{R}^3 = 3$)

Base de $\mathbb{R}^3$: $\{(1,1,1),(2,0,1),(1,1,0)\}$.

3. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x,y) = (2x+y, x+y)$$

(1.0 val.) (a) Determine a matriz que representa a transformação nas bases canónicas, isto é, $M(T, b.c., b.c.)$.

$$T(1,0) = (2,1)$$
$$T(0,1) = (1,1)$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(2.0 val.) (b) Determine o núcleo de T. O que pode concluir sobre a injectividade da transformação T e sobre $\dim \operatorname{im}(T)$? Justifique.

$$\text{Nuc}\, T = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0) \}$$

$$T(x,y) = (0,0) \Leftrightarrow (2x+y, x+y) = (0,0)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+y = 0 \\ x+y = 0 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = -x \end{cases} \quad \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

$$\text{Nuc}\, T = \{ (0,0) \}$$

T é uma transformação injectiva

Teorema da dimensão:

$$2 = \dim \text{Nuc}\, T + \dim \operatorname{im}(T)$$
$$2 = 0 + \dim \operatorname{im}(T)$$
$$\dim \operatorname{im}(T) = 2$$

(2.0 val.) (c) Considere a base $\mathcal{B} = \{(1,0),(1,1)\}$. Determine a matriz que representa a transformação T na base $\mathcal{B}$, isto é, $M(T,\mathcal{B},\mathcal{B})$.

$$\begin{tikzcd}
B.C. \arrow[r, "T"', "A"] & B.C. \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\mathcal{B} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "T", "B"'] & \mathcal{B}
\end{tikzcd}$$

$$B = P^{-1} A P$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad P^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

4. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix}.$$

(1.5 val.) (a) Mostre que $(2,2,2)$ é vetor próprio de A. Qual o valor próprio associado? Justifique.

Seja $v = (2,2,2)$

$$A v = \lambda v$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{bmatrix} \Leftrightarrow 4+4+4 = \lambda \cdot 2 \Leftrightarrow \lambda = 6$$

O valor próprio associado é $\lambda = 6$

(1.0 val.) (b) Mostre que $\lambda = 0$ é outro valor próprio de A.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

Se $\lambda = 0$ vem $\begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow |A - 0I| = 0$

(1.5 val.) 5. Considere a transformação linear $f : \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^4$ e suponha que a multiplicidade geométrica do valor próprio $\lambda = -2$ de f é 3 e que $f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$. Seja A a matriz que representa a transformação f nas bases canónicas, isto é, $A = M(f, b.c., b.c.)$. Calcule o determinante da matriz A.

- De $f(0,0,0,1) = (0,0,0,1)$ vem que $\lambda = 1$ é valor próprio de f associado ao vector próprio $(0,0,0,1)$. Logo m.g. de $\lambda = 1$ de f é maior ou igual a 1.

- $\lambda = -2$ é valor próprio de f com m.g. 3

- Como m.g. de $\lambda = 1$ somada com a m.g. de $\lambda = -2$ tem de ser menor ou igual a 4, concluimos que neste caso é 4.

- Logo A é diagonalizável, i.e., $A = PDP^{-1}$, onde P é a matriz que tem por colunas os vectores próprios e $D = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

- $|A| = |PDP^{-1}| = |P|\,|D|\,|P^{-1}| = |D| = -8$

Folha de rascunho