Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios extra de Álgebra Linear

Ano Lectivo 2014/2015

1. Sejam $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ e $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

   (a) Calcule, se possível, as matrizes AB, BA e B^TAB.

   (b) Verifique se as matrizes
   $$A,\ B,\ AB,\ BA \text{ e } B^TAB$$
   são invertíveis e determine, nos casos em que existe, a matriz inversa.

2. Sejam A e B matrizes de ordem n invertíveis. Mostre que:

   (a) $\left(B^T - B^T(3A^T)^{-1}\right)^T B^{-1} = I - \frac{1}{3}A^{-1}$.

   (b) $(2A)^{-1} - \left((B^{-1})^T A\right)^{-1} = A^{-1}\left(\frac{1}{2}I - B^T\right)$.

3. Considere as matrizes:
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

   (a) Verifique que A é invertível e determine A^{-1}.

   (b) Indique, justificando, $r(A)$ e $r(A^{-1})$.

   (c) Diga, justificando, se AB^T é invertível.

4. Considere a matriz:
   $$A = \begin{bmatrix} a & -a & 0 & 1 \\ 0 & \frac{1}{3} & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 1 & -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine os valores de $a \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz é invertível.

   (b) Suponha $a = 0$. Calcule a matriz inversa de A.

5. Considere a matriz
   $$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & a \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Determine para que valores de a a matriz A é invertível.

   (b) Suponha $a = 0$. Calcule A^{-1}.

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$. Uma matriz $C \in M_{3\times 2}$ diz-se uma **inversa à direita de** A se

$$AC = I_2.$$

   (a) Mostre que $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/2 \\ 8 & -6 \end{bmatrix}$ é uma inversa à direita de A.

   (b) Encontre uma matriz C', distinta de C, que seja uma inversa à direita de A.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares de incógnitas x, y e z,

$$\begin{cases} x + \beta z = 0 \\ -2x + y = \alpha \\ -x + y + z = 4 \end{cases} \quad , \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

   (a) Escreva a equação matricial do sistema.

   (b) Usando o método de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

   (c) Suponha $\alpha = 4$, $\beta = 1$. Resolva o sistema.

8. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

   (a) Classifique o sistema $AX = b$, para todo o $b \in \mathbb{R}^3$.

   (b) Suponha $b = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}^T$.

      i) Usando o método de eliminação de Gauss, resolva o sistema $AX = b$.

      ii) Verifique se $b \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$, onde v_i é o vetor na coluna i de A. Em caso afirmativo, dê um exemplo de uma combinação linear da forma

$$b = rv_1 + sv_2 + 0v_3 + 0v_4.$$

9. Considere o seguinte sistema de equações lineares de incógnitas x, y e z:

$$\begin{cases} x + 2y + 3z = 1 \\ 2x + a^2 y + 6z = a \\ -x - 2y + (a-3)z = 1 \end{cases} \quad , \quad a \in \mathbb{R}.$$

   (a) Escreva a equação matricial do sistema.

   (b) Determine para que valores de a o sistema é impossível.

(c) Para $a = 2$, resolva o sistema pelo método de Gauss.

(d) Tendo em conta as alíneas anteriores, justifique se a afirmação é verdadeira ou falsa.
"O vetor $(1, 0, 1)$ escreve-se como combinação linear dos vetores $(1, 2, -1), (2, 0, -2), (3, 6, -3)$."

10. Considere a matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & k+1 & 1 & 3 \\ 1 & k & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 1 & k \end{array}\right]$$

de um sistema de equações lineares de variáveis x, y e z, onde k é um parâmetro real.

(a) Escreva o sistema na forma canónica.

(b) Classifique o sistema em função do parâmetro k.

(c) Seja $k = 1$. Determine o conjunto solução do sistema.

11. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

onde α é um parâmetro real.

(a) Escreva o sistema na forma canónica.

(b) Determine o único α para o qual $A_\alpha X = B$ é impossível.

(c) Para $\alpha = 1$, determine o conjunto solução do sistema $A_1 X = B$.
Considere nas alíneas seguintes $\alpha = 2$.

(d) Considere o conjunto gerado pelas colunas da matriz A_2, isto é,

$$V = \text{span}\{(2, 1, 2), (1, 2, 1), (2, 1, 2)\}.$$

Qual a dimensão de V? Indique uma base para V.

(e) Comente a afirmação: "$B \in V$". Justifique.

12. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & b \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} a \\ b \\ 0 \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Usando o método de Gauss, discuta a natureza do sistema $AX = B$ em função dos parâmetros a e b.

(b) Suponha $a = 1$ e $b = -1$. Resolva o sistema pelo método de Gauss.

(c) Determine os valores de $a, b \in \mathbb{R}$ para os quais a matriz A é invertível. Suponha $a = 0$ e $b = 1$ e calcule a sua inversa.

13. Sejam A e B matrizes de ordem 2 invertíveis tais que $|A| = -1$ e $|B| = 2$. Calcule o valor de:

    (a) $2|AB^{-1}A^T| - |3A^TB|$.

    (b) $4|A^2B^{-1}| + |3(AB)^T|$.

    (c) $|-2A| + |B^TA^{-2}|$.

14. Considere o seguinte subconjunto de $\mathbb{R}^3$

$$V = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = -y + 2z\right\}.$$

    (a) Mostre que V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$.

    (b) Indique uma base de V.

15. Considere o subconjunto de $\mathbb{R}^4$

$$V = \{(a + b, a, 0, -a) \ : \ a, b \in \mathbb{R}\}.$$

    (a) Mostre que V é subespaço vetorial de $\mathbb{R}^4$.

    (b) Indique um elemento que pertença a V e um elemento que não pertença a V.

    (c) Determine uma base do subespaço vetorial V.

16. Considere o seguinte subespaço de $\mathbb{R}^3$:

$$W = \text{span}\{(1, 1, 0),\ (1, 0, -1)\}.$$

    (a) Mostre que $B = \{(1, 1, 0),\ (1, 0, -1)\}$ é uma base de W. Justifique.

    (b) Mostre que o vetor $(0, 1, 0)$ não pertence a W.

    (c) Complete o conjunto B até obter uma base para $\mathbb{R}^3$.

17. Considere os vetores de $\mathbb{R}^3$:

$$u_1 = (1, 0, 1), \quad u_2 = (0, -1, 2), \quad u_3 = (-1, -1, 1), \quad u_4 = (0, 1, 1).$$

    (a) Verifique que os vetores são linearmente dependentes. Escreva um vetor como combinação linear dos restantes.

    (b) Usando a alínea (a), construa uma base de $\mathbb{R}^3$.

18. Seja $V = \text{span}\{(1, 1, 0), (1, 2, 1), (2, 1, -1)\}$.

    (a) Determine uma base de V.

    (b) Indique, justificando, qual a dimensão de V.

    (c) Mostre que $u = (1, 4, 3) \in V$.

    (d) Determine, justificando, as cooordenadas do vector $u = (1, 4, 3)$ na base encontrada na alínea (a).

19. Considere função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (y - 2x, x)$.

    (a) Mostre que f é linear.
    (b) Determine uma base para o núcleo de f. Conclua quanto à dimensão da imagem de f.
    (c) Mostre que f é invertível e determine $f^{-1}(x, y)$.

20. Considere as funções lineares $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ e $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$A = M(f; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = M(g; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determine as expressões analíticas das funções f e g.
    (b) Determine $\mathrm{Ker}\,(g)$ e a sua dimensão.
    (c) Mostre que a função $g \circ f$ é invertível e determine a expressão analítica de $(g \circ f)^{-1}$.

21. Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ definidas por:

$$T_1(x, y, z) = (x + y + z, x + 2z), \quad T_2(x, y) = (5y, x - 3y, -2y).$$

    (a) Determine $A_1 = M(T_1; b.c., b.c.)$ e $A_2 = M(T_2; b.c, b.c)$.
    (b) Determine $\mathrm{Ker}\,(T_1)$ e $\mathrm{Ker}\,(T_2)$. O que pode concluir quanto à injetividade das transformações T_1 e T_2?
    (c) Determine $(T_1 \circ T_2)(x, y)$, usando A_1 e A_2.

22. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida pela matriz

$$A = M(T; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

    (a) Determine a expressão analítica de T.
    (b) Determine $\mathrm{Ker}\,(T)$.
    (c) Use o teorema da dimensão para calcular a dimensão de $\mathrm{im}\,(T)$.
    (d) Determine a matriz $B = M(T; \mathcal{B}, b.c.)$, onde $\mathcal{B} = \{(1, 3), (1, 2)\}$.

23. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por:

$$T(x, y, z) = (2x - z, y + z).$$

    (a) Determine $A = M(T; b.c., b.c.)$.
    (b) Determine uma base de $\mathrm{Ker}\,(T)$ e conclua quanto à dimensão de $\mathrm{im}\,(T)$.
    (c) Considere a base $\mathcal{B} = \{(1, 1), (1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^2$. Determine $B = M(T; b.c., \mathcal{B})$.

24. Considere a matriz

$$A = M(f; \mathcal{B}_1, \mathcal{B}_2) = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

com $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(1,1)\}$ e $\mathcal{B}_2 = \{(1,1),(1,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

(a) Determine $M(f; b.c., b.c.)$.

(b) Calcule $f(2,3)$ e $f((1,-2)_{\mathcal{B}_1})$.

25. Considere as transformações lineares $T_1 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ e $T_2 : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definidas por:

$$A_1 = M(T_1; b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A_2 = M(T_2; b.c, b.c) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine as expressões analíticas de T_1 e T_2.

(b) Determine $\mathrm{Ker}\,(T_1)$ e $\mathrm{Ker}\,(T_2)$. O que pode concluir quanto à injectividade das transformações T_1 e T_2?

(c) Determine a expressão analítica de T_2^{-1}.

(d) Determine a matriz $B = M(T_2; \mathcal{B}, \mathcal{B})$, onde $\mathcal{B} = \{(-2,1),(0,1)\}$.

(e) O que pode concluir quanto aos valores e vectores próprios de T_2? Justifique, indicando-os.

26. Considere a matriz $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine os valores próprios de A.

(b) Determine os vetores próprios de A.

(c) Mostre que A é diagonalizável e indique a matriz diagonal D e a matriz S tais que

$$D = S^{-1}AS.$$

27. Considere a matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Determine o subespaço próprio associado ao valor próprio $\lambda = 1$.

(c) Indique, justificando, a dimensão dos restantes subespaços próprios.
(Nota: Não é necessário determinar os subespaços próprios)

(d) Justifique que existe uma matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$ e indique essa matriz D.

28. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os valores próprios de T.

(b) Calcule os vetores próprios de T associados ao valor próprio $\lambda = 1$.

(c) Justifique que T é diagonalizável. Indique uma matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

29. Considere a matriz
$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 9 & 0 \end{bmatrix}.$$

(a) Calcule os valores próprios de A.

(b) Determine o subespaço próprio de A associado ao valor próprio $\lambda = -3$.

(c) Sem efetuar nenhum cálculo, justifique se A é diagonalizável.
Em caso afirmativo, indique a matriz diagonal D tal que $D = P^{-1}AP$.

30. Considere a matriz:
$$A_k = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & k \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

onde $k \geq 0$.

(a) Calcule os valores próprios de A_k, em função de k.

(b) Determine os valores de k para os quais A_k é diagonalizável.

(c) Considere $k = 1$. Determine uma base tal que $D = S^{-1}AS$ e indique a matriz diagonal D.

Soluções

1. (a) $AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$; BA impossível; $B^T AB = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

   (b) B, AB, BA, $B^T AB$ não são invetíveis. A é invertível. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 2 & -1 & 0 \end{bmatrix}$

2.

3. (a) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} & 0 \end{bmatrix}$.

   (b) $r(A) = r(A^{-1}) = 3$.

   (c) AB^T não é invertível.

4. (a) $a \neq \frac{1}{2}$

   (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

5. (a) $a \neq 1$

   (b) $A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

6. (a)

   (b) $C' = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$

7. (a)

   (b) $\beta \neq 1$ e $\forall \alpha \in \mathbb{R}$, SPD; $\beta = 1$ e $\alpha = 4$, SPI; $\beta = 1$ e $\alpha \neq 4$, SI.

   (c) $(-z, -2z + 4, z), \forall z \in \mathbb{R}$.

8. (a) $2(b_2 - b_1) + b_3 = 0$, SPI; $2(b_2 - b_1) + b_3 \neq 0$, SI.

(b) i. $(3 - z - 2w, -1 + w, z, w), \forall z, w \in \mathbb{R}$.
   ii. $b \in \text{span}\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ porque $AX = B$ é SPI. Por ex. $r = 3$ e $s = -1$.

9. (a)
   (b) $a = 0 \vee a = -2$.
   (c) $(-2y, -2, y, 1), \forall y \in \mathbb{R}$.
   (d) Falso porque para $a = 0$ o sistema é impossível.

10. (a)
   (b) $k = 1$, SPI; $k \neq 1$, SI.
   (c) $(-2 + 3y, y, 3 - 2y), \forall y \in \mathbb{R}$.

11. (a)
   (b) $\alpha = -1$.
   (c) $(1 - y - z, y, z), \forall y, z \in \mathbb{R}$.
   (d) $\dim V = 2$, Base de V: $\{(2, 1, 2), (1, 2, 1)\}$.
   (e) Verdadeira porque o sistema $A_2 X = B$ é SPI.

12. (a) $a = 1$ e $b \neq -1$, SI; $a = 1$ e $b = -1$, SPI; $a \neq 1$ e $b = 0$, SPI; $a \neq 1$ e $b \neq 0$, SPD;
   (b) $(y - 1, y, -1), \forall y \in \mathbb{R}$.
   (c) A é invertível se $a \neq 1$ e $b \neq 0$. $A^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

13. (a) 19.
   (b) 19.
   (c) -2

14. (a)
   (b) $\{(-1, 1, 0), (2, 0, 1)\}$.

15. (a)
   (b) Por exemplo: $(1, 1, 0, -1) \in V$ e $(1, 1, 1, -1) \notin V$.
   (c) $\{(1, 1, 0, -1), (1, 0, 0, 0)\}$.

16. (a)
   (b)
   (c) $\{(1, 1, 0), (1, 0, -1), (0, 1, 0)\}$.

17. (a) $(-1, -1, 1) = -1(1, 0, 1) + 1(0, -1, 2) + 0(0, 1, 1)$
   (b) $\{(1, 0, 1), (0, -1, 2), (0, 1, 1)\}$.

18. (a) $\{(1,1,0),(1,2,1)\}$.
    (b) $\dim V = 2$.
    (c)
    (d) $(-2,3)$.
19. (a)
    (b) Não existe uma base para núcleo de f. $\dim Im(f) = 2$.
    (c) $f^{-1}(x,y) = (y, x+2y)$.
20. (a) $f(x,y) = (-y, x+y, x+2y)$; $\quad g(x,y,z) = (-x+y, 3x)$.
    (b) $\text{Ker}\,(g) = \text{span}\{(0,0,1)\}$; $\quad \dim \text{Ker}\,(g) = 1$.
    (c) $(g \circ f)^{-1}(x,y) = \left(x + \frac{2}{3}y, -\frac{1}{3}y\right)$.
21. (a) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -3 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$.
    (b) $\text{Ker}\,(T_1) = \text{span}\{(-2,1,1)\}$; $\quad \text{Ker}\,(T_2) = \{(0,0)\}$. T_1 não é injectivo e T_2 é injectivo.
    (c) $(T_1 \circ T_2)(x,y) = (x,y)$.
22. (a) $T(x,y) = (y, 2x+y, -x+y)$.
    (b) $\text{Ker}\,(T) = \{(0,0)\}$.
    (c) $\dim \text{im}\,(T) = 2$.
    (d) $B = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$.
23. (a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.
    (b) $\{(\frac{1}{2}, -1, 1)\}$; $\quad \dim \text{im}\,(T) = 2$.
    (c) $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix}$.
24. (a) $\begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$.
    (b) $f(2,3) = (0,3)$; $\quad f((1,-2)_{\mathcal{B}_1}) = (-6,-3)$.
25. (a) $T_1(x,y,z) = (y+z, -x+2y+z)$; $\quad T_2(x,y) = (x, x+3y)$.

(b) $\mathrm{Ker}\,(T_1) = \mathsf{span}\{(-1,-1,1)\}$; $\mathrm{Ker}\,(T_2) = \mathsf{span}\{(0,0)\}$. T_1 não é injectivo. T_2 é injectivo.

(c) $T_2^{-1}(x,y) = \left(x, -\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y\right)$.

(d) $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$.

(e) Valores próprios: $\lambda = 1$ ou $\lambda = 3$. Vectores próprios: $(-2,1), (0,1)$.

26. (a) $\lambda = 1$ ou $\lambda = 4$.

(b) $\lambda = 1: \quad (1,0,0), (0,0,1)$; $\lambda = 4: \quad (0,3,1)$.

(c) $D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$; $S = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

27. (a) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$ ou $\lambda = -1$.

(b) $V_1 = \mathsf{span}\{(0,1,1)\}$.

(c) 1.

(d) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

28. (a) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

(b) $\{(0,1,0), (0,0,1)\}$.

(c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

29. (a) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 3$ ou $\lambda = -3$.

(b) $V_{-3} = \mathsf{span}\{\left(-\frac{1}{3}, 1, -3\right)\}$.

(c) $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

30. (a) $\lambda = 0$ ou $\lambda = \sqrt{k}$ ou $\lambda = -\sqrt{k}$.

(b) $k \neq 0$.

(c) $\{(-1,0,1), (0,1,1), (0,-1,1)\}$; $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.