

Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

Exercícios de Cálculo Diferencial em $\mathbb{R}^n$

Setembro 2014

1 Noções topológicas em $\mathbb{R}^n$. Domínios e representação gráfica

1. Considere as funções:

- (a) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$
- (b) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(1 - x + y)$, $x, y \geq 0$
- (c) $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \ln(x + y)$
- (d) $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}}$

Para cada uma das funções indique:

- (i) o seu domínio e represente-o graficamente.
 - (ii) o seu interior, exterior e fronteira.
 - (iii) se o seu domínio é um conjunto aberto, fechado e limitado.
2. Determine e represente graficamente o domínio de definição D de cada uma das seguintes funções:

- (a) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2}$
- (b) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = 1 + \sqrt{-(x - y)^2}$
- (c) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}$
- (d) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(x, y) = (e^{x-y}, \ln(x + y))$
- (e) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $f(x, y) = (x, y, x^2 + y^2)$
- (f) $f : D \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y, z) = \frac{1}{\sqrt{1 - x^2 - y^2 - z^2}}$
- (g) $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1} - \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

3. Determine o domínio de definição das seguintes funções:

- (a) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\ln(x + y)} & , \quad (x, y) : x + y > 0 \\ \sqrt{1 - x - y} & , \quad (x, y) : x + y \leq 0 \end{cases}$
- (b) $f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3y^4}{2x^3 - y^3} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

$$(c) \ f(x, y) = \begin{cases} \ln(3x + y) & , \quad (x, y) : 3x + y > 0 \\ \frac{1}{x + y} & , \quad (x, y) : 3x + y \leq 0 \end{cases}$$

$$(d) \ f(x, y) = \begin{cases} \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{3y^2 - x} & , \quad (x, y) : x \neq 3y \\ 0 & , \quad (x, y) : x = 3y \end{cases}$$

4. Seja a função $f(x, y) = \ln(xy - 1) + \sqrt{9 - (x - 1)^2 - y^2}$.

Determine o seu domínio de definição e represente-o graficamente.

5. Para o conjunto $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 1 \wedge y - x \leq 1 \wedge y \geq 0\}$, considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y^2 + 1} & , \quad (x, y) \in A \\ 1 & , \quad (x, y) \notin A \end{cases}$$

Determine o domínio da função.

2 Limites e continuidade

1. Considere a função $f(x, y) = \frac{x-y}{x+y}$.
 - (a) Determine o domínio de f .
 - (b) Calcule o limite da função no ponto $(1, 2)$.
 - (c) Calcule, se possível, o limite da função no ponto $(0, 0)$.
2. Mostre que a função $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^2}$ não tem limite no ponto $(0, 0)$.
3. Mostre que a função $f(x, y) = \frac{xy^2}{x^2 + y^4}$ não tem limite no ponto $(0, 0)$.
4. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Estude o seu limite na origem dos eixos.

5. Prove pela definição que

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{\sqrt{(x^2 + y^2)^3}} \neq 0.$$

6. Calcule, se possível, o limite da função $f(x, y) = 2 \frac{x^2 - y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ no ponto $(0, 0)$.

7. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & , \quad (x, y) : x \neq \pm y \\ 1 & , \quad (x, y) : x = \pm y \end{cases}$$

Verifique se a função tem limite em $(0, 0)$.

8. Considere as funções dos exercícios 4 e 5. O que pode concluir quanto à continuidade de cada uma das funções no ponto $(0, 0)$.
9. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^3 + 4y^2}{x^2 - 5y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifique se a função é contínua na origem dos eixos.

10. Faça o estudo da continuidade da função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{y-2}{x+3} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

11. Dada a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$:

$$f(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y)) = \begin{cases} f_1(x, y) = \frac{x-4}{2y+2} \\ f_2(x, y) = \frac{y-3}{x^2+1} \end{cases}$$

Estude-a quanto à continuidade no ponto $(0, 0)$.

12. Considere as funções dos exercícios 5 e 6. Verifique se cada uma das funções é prolongável por continuidade ao ponto $(0, 0)$.

13. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3+2y^3}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

Estude-a quanto à continuidade.

14. Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{y + x \sin x} & , \quad (x, y) : y \neq -x \sin x \\ 1 & , \quad (x, y) : y = -x \sin x \end{cases}$$

Prove que a função não é contínua em $(0, 0)$. Justifique.

3 Derivadas parciais de 1ª ordem. Diferenciabilidade. Derivada dirigida. Gradiente e Jacobiana

1. Calcule as derivadas parciais de 1ª ordem de cada uma das seguintes funções, no seu domínio de validade:

(a) $f(x, y) = x^2 + y^2$

(b) $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$

(c) $f(x, y) = \frac{x^4 - y^4}{xy}$

(d) $f(x, y) = \sqrt{e^{x-5y^2} - y^2}$

(e) $f(x, y) = \ln \sin \left(\frac{x}{\sqrt{y}} \right)$

(f) $f(x, y, z) = \sqrt{4 - x^2 - y^2 - z^2}$

2. Considere a função $f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2}$. Calcule, pela definição, $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,1)}$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)}$.

3. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x+y}{x^2+y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(0,0)}$.

4. Considere

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & , \quad x \neq \pm y \\ 4 & , \quad x = \pm y \end{cases}$$

Calcule $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(-2,-2)}$ e $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(-2,-2)}$.

5. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^3 + 3y^4}{2x^3 - y^3} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(0,0)}$.

6. Dada a função $z = xy \tan \left(\frac{y}{x} \right)$. Mostre que $x \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 2z$.

7. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Determine $\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(a,b)}$ para todo o $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

8. Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2x^2 - y^3}{x^2 + y^2} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Calcule $\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(a,b)}$ para todo o $(a, b) \in \mathbb{R}^2$.

9. Considere a função $f(x, y) = xy$.

- (a) Mostre que f é uma função diferenciável no ponto $(0, 0)$.
- (b) Calcule o gradiente de f .
- (c) Conclua que f é uma função diferenciável em $\mathbb{R}^2$.
- (d) Usando c), calcule a derivada direccional no ponto $(1, -1)$ segundo o vetor $(0, 2)$.
- (e) Calcule a derivada dirigida de f no ponto $(1, -1)$ segundo o vetor $(0, 2)$.

10. Considere a seguinte função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Verifique se a função é diferenciável em $(0, 0)$.

11. Seja

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2y^5 + x^2 y^3}{\sqrt{x^2 + y^2}} & , \quad (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & , \quad (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- (a) Estude a continuidade da função na origem dos eixos.

- (b) Com base no resultado da alínea a) que pode concluir quanto à diferenciabilidade da função em $(0,0)$? Justifique.

12. Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x}{y-1} & , \quad y \neq 1 \\ 0 & , \quad y = 1 \end{cases}$$

Mostre que $f(x, y)$ não é diferenciável no ponto $(2, 1)$.

13. Considere a função diferenciável $g(x, y) = \sin(xy)$.

- (a) Determine o vetor gradiente de g no ponto $(0, 0)$.
- (b) Calcule a derivada direccional de g no ponto $(0, 0)$, segundo a direcção do vetor $(1, 2)$.
- (c) Calcule a derivada dirigida de g no ponto $(0, 0)$, segundo a direcção do vetor $(1, 2)$.

14. Determine o gradiente das seguintes funções:

- (a) $f(x, y, z) = (x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-3)^2$, no ponto $(1, -2, 0)$.
- (b) $f(x, y) = 2x^2 - 3xy + y^2 + 4x - 3y$ no ponto onde $f'_x = 0$ e $f'_y = 0$.

15. Considere a função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x, y) = x \sin^2 y + xy^2$. Diga, justificando, em que direcção é que a derivada dirigida da função é dada pela expressão:

$$f'_{\vec{u}}(x, y) = \sin^2 y + y^2.$$

16. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por:

$$f(x, y) = (x^2 + y^2, -3x^2, 2xy).$$

Determine a matriz jacobiana de f .

17. Considere as funções f e g dos exercícios 9 e 13. Seja $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável definida por:

$$h(x, y) = (f(x, y), g(x, y)).$$

- (a) Determine a matriz jacobiana de h .
- (b) Determine h'_x , usando a).
- (c) Calcule a derivada direccional de h no ponto $(1, 2)$ segundo o vetor $(1, 1)$.

4 Regra de derivação da função composta

1. Considere a função $g(t) = f(x(t), y(t))$ onde $f(x, y) = 2x + 2y$, $x(t) = \sin(t)$ e $y(t) = \cos(t)$.

(a) Determine a expressão analítica de $g(t)$.

(b) Calcule $\frac{dg}{dt}$, usando a expressão analítica de $g(t)$.

(c) Calcule $\frac{dg}{dt}$, usando a regra de derivação da função composta.

2. Sendo $z = \tan(x^2 + y^2)$ com $x = t^2 - 3t$, $y = \log t$. Calcule $\frac{\partial z}{\partial t}$.

3. Sendo $z = f(u(x, y), v(x, y))$ com $u(x, y) = x^2 - y^2$ e $v(x, y) = e^{xy}$, determine a expressão de cada uma das derivadas parciais $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

4. Mostre que a função $F(x, y, z) = f(x - y, y - z, z - x)$ verifica a equação:

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} + \frac{\partial F}{\partial z} = 0$$

qualquer que seja a função f .

5. Demonstre que para a função $z = yf(x^2 - y^2)$ se tem:

$$\frac{1}{x} \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{1}{y} \frac{\partial z}{\partial y} = \frac{z}{y^2}$$

6. Para a função $z = x^\alpha g\left(\frac{y}{x}\right)$, com α constante, calcule $\frac{\partial z}{\partial x}$ e $\frac{\partial z}{\partial y}$.

7. Sendo $V(x, y, z) = xy^2 h\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, mostre que:

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = 3V.$$

5 Derivadas de ordem superior à primeira

Notação: $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$.

1. Considere as funções:

(a) $f(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$.

(b) $f(x, y) = x^2 + \sin(xy)$.

(c) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{y}}$.

Para cada uma das funções calcule:

(i) $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$.

(ii) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

(iii) Calcule a matriz hessiana.

2. Considere o exercício 7 da Seção 3. Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y)$.

3. Seja $f(x, y, z) = ye^{x-y} + xz$. Calcule a matriz hessiana.

4. Seja $g(x, y) = 2xy^2 + 4\ln(4x)$. Calcule as derivadas parciais de 2ª ordem de g .

5. Seja $h(x, y) = y^2e^x + x^2y^3 - 1$. Determine a expressão das derivadas parciais de 3ª ordem $\frac{\partial^3 h}{\partial x^2 \partial y}(x, y)$ e $\frac{\partial^3 h}{\partial x^3}$.

6. Considere a função $g(x, y) = e^x \ln(y) + \sin(x) \ln(y)$. Determine as derivadas parciais $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(x, y)$ e $\frac{\partial^3 g}{\partial y \partial x \partial y}(x, y)$.

7. Considere a função:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 - y^2} & , \quad x \neq \pm y \\ 0 & , \quad x = \pm y \end{cases}$$

Calcule o valor das derivadas parciais $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$.

6 Função Homogénea

1. Mostre que as seguintes funções são homogéneas. Determine o grau de homogeneidade e verifique a Identidade de Euler:

(a) $f(x, y) = x^2 + 4xy + 4y^2$

(b) $f(x, y) = \ln \left(\frac{(x+y)^2}{yx} \right)$

(c) $f(x, y, z) = \sin \left(\frac{x+y}{z} \right)$

(d) $f(x, y) = \sqrt[3]{yx^2}$

2. Seja $f(x, y)$ uma função homogénea do 2º grau. Considere a função:

$$g(x, y) = xf(x, y).$$

- (a) Qual o grau de homogeneidade de $g(x, y)$?
(b) Mostre que g'_x e g'_y são funções homogéneas do 2º grau.
(c) Mostre que $g(x, y)$ verifica a Identidade de Euler.

3. Seja

$$f(x, y) = x^k y^{2+k} + yx.$$

- (a) Para que valores de k a função é homogénea? Qual o seu grau de homogeneidade?
(b) Para o valor de k encontrado, prove a Identidade de Euler para a função.

4. Sendo $V(x, y, z) = xy^2 h\left(\frac{y}{x}, \frac{x}{z}\right)$, mostre que:

$$x \frac{\partial V}{\partial x} + y \frac{\partial V}{\partial y} + z \frac{\partial V}{\partial z} = 3V.$$

5. Considere a seguinte função de produção $Y = AK^\alpha L^{1-\alpha}$, $k > 0, L > 0$, função de Cobb-Douglas com dois factores de produção: o Capital (K) e o Trabalho (L).

- (a) Determine o seu grau de homogeneidade.
(b) Supondo $\alpha = 0.75$, verifique a Identidade de Euler.
(c) Prove que a produtividade marginal do capital $\frac{\partial Y}{\partial K}$ é homogénea de grau zero.

6. Seja $z = f(u, v)$ uma função composta em que $u = x^3$ e $v = x^2 y$. Sabe-se que $f(u, v)$ é uma função homogénea de grau 2 e de classe C^2 . Considere ainda que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial u} \right)_{(8,4)} = 1 \quad \text{e} \quad \left(\frac{\partial f}{\partial v} \right)_{(8,4)} = 2.$$

- (a) Calcule $\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{(2,1)}$ e $\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_{(2,1)}$.
- (b) Determine $f(8, 4)$.
- (c) Qual o valor da derivada de z , no ponto $(x, y) = (2, 1)$, segundo a direcção do vector $(-1, 0)$? Como se denomina esta derivada?