Instituto Universitário de Lisboa

Departamento de Matemática

# Exercícios de Álgebra Linear

João Costa

Sérgio Mendes

Helena Soares

# 1 Matrizes

**Notação:**

$M_{m\times n}$ denota o conjunto das matrizes reais do tipo $m \times n$. Quando $m = n$, escrevemos $M_n$.

## 1.1 Álgebra, produto e transposição de matrizes

1. $A$ é uma matriz $4 \times 3$, $B$ é uma matriz $3 \times 4$ e $C$ é uma matriz $4 \times 1$. Todas as entradas destas matrizes são iguais a 1. Quais das seguintes operações são permitidas e qual o seu resultado?

$$AB \qquad BA \qquad ABC \qquad CBA \qquad A(B+C).$$

2. Para cada um dos seguintes pares de matrizes $A$ e $B$, determine, quando estiverem definidas, as matrizes $A+2B$, $A-B$, $4A-3B$, $A^2$, $B^2$, $AB$, $BA$, $(3A)(2B)$, $A^TB$, $(AB)^T$.

   (a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}.$

   (b) $A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -5 & 0 \end{bmatrix}.$

   (c) $A = \begin{bmatrix} 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

   (d) $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 3 \end{bmatrix}.$

3. Determine o tipo das matrizes $A$, $B$ e $C$:

   (a) sabendo que $A^2B = C$, que $B$ tem 3 colunas e que $C$ tem 2 linhas;

   (b) sabendo que $A + BC = I_3$ e que $C$ tem 2 linhas.

4. Considere as matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \; B^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

   Calcule a matriz $X$ tal que

$$\left(B^T - 3X\right)^T - 3A = 2B.$$

5. Verdadeiro ou falso. Justifique.
   (a) Se as linhas 1 e 3 de uma matriz $B$ são iguais, então também o são as linhas 1 e 3 da matriz $AB$.
   (b) Se as colunas 1 e 3 de uma matriz $B$ são iguais, então também o são as colunas 1 e 3 da matriz $AB$.
   (c) $(AB)^2 = A^2B^2$.
   (d) Se $A^2$ está definida então $A$ é uma matriz quadrada.
   (e) Se $AB$ e $BA$ estão definidas então $A$ e $B$ são matrizes quadradas.
   (f) Se $AB$ e $BA$ estão definidas então $AB$ e $BA$ são matrizes quadradas.
   (g) Se $AB = B$ então $A = I$.
   (h) Se $B = A^2$ e $A$ é uma matriz quadrada $n \times n$ simétrica, então $b_{ii} \geq 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$.

6. Determine $A^n$, $n \in \mathbb{N}$, para

   (a) $A = \begin{bmatrix} \pi & 0 \\ 0 & \pi \end{bmatrix}$; (b) $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$; (c) $A = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$;

   (d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$; (e) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

7. Determine a matriz $A$ do tipo $3 \times 3$ cujas entradas são:
   (a) $a_{ij} = (-1)^{i+j}$;
   (b) $a_{ij} = i/j$.

8. Seja $A$ uma matriz quadrada. Mostre que a matriz $A^T + A$ é simétrica.

## 1.2 Combinações lineares, dependência e independência linear. Característica.

1. Considere os seguintes vetores de $\mathbb{R}^4$:

$$u = (4, -2, 0, -2), \;\; v = (3, 2, 1, 0) \;\text{ e }\; w = (1, -1, 2, 5).$$

   Calcule as seguintes combinações lineares de $u$, $v$ e $w$:
   (a) $u + v + w$
   (b) $u - 2v + 3w$
   (c) $\frac{1}{2}u - v + 2w$
   (d) $-2u + v + 5w$

2. Em cada uma das alíneas seguintes, determine, caso existam, todos os escalares $a$ tais que:

   (a) o vetor $(-6, a)$ é combinação linear dos vetores $(1, 3)$ e $(2, 1)$;

   (b) o vetor $(-2, 1)$ é combinação linear dos vetores $(1, 0)$ e $(a, 3)$;

   (c) o vetor $(1, a, -3)$ é combinação linear dos vetores $(1, 1, 0)$ e $(0, 1, 3)$;

   (d) o vetor $(2, 0, 3)$ é combinação linear dos vetores $(a, -a, 0)$ e $(1, 1, 2)$.

3. Verifique, recorrendo à definição, a dependência linear dos seguintes vetores:

   (a) $(1, 2)$, $(-2, -4)$

   (b) $(1, 0)$, $(1, -2)$, $(3, 4)$

   (c) $(1, 1, 0)$, $(1, -1, 2)$

   (d) $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 0)$, $(0, 1, 3)$

   (e) $(1, 0, 0)$, $(2, 1, 0)$, $(1, 2, 0)$

4. Recorrendo à condensação de matrizes verifique se os seguintes sistemas de vetores são linearmente independentes.

   (a) $(1, 1)$, $(2, 2)$

   (b) $(1, 1)$, $(1, -2)$

   (c) $(1, 1)$, $(-1, 0)$, $(1, 2)$

   (d) $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 3)$

   (e) $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 3)$, $(0, 1, 1)$

   (f) $(1, 0, 0)$, $(1, -2, 3)$, $(0, 1, 1)$, $(\pi, e, -\sqrt{2})$

5. Calcule a característica das seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 1 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 6 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 2 & -4 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -2 \\ 4 & 8 & 5 \\ -2 & -6 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -3 & 3 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 5 & 5 & 9 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 2 & -6 & 0 & -2 & -8 \\ 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & -3 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 9 & -12 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} 2 & 4 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & -4 \end{bmatrix}$

6. Determine, em função dos parâmetros, se as colunas das seguintes matrizes são linearmente independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \alpha & 1 \\ 1 & \beta \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ 1 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & \alpha \\ -1 & 0 & \alpha^2 & 0 \end{bmatrix}.$$

## 1.3 Inversão de matrizes

1. Verifique se as seguintes matrizes são invertíveis e em caso afirmativo determine a sua inversa:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 1 & 4 & 3 \\ 1 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 9 \\ 0 & 0 & 0 \\ 10 & 3 & 4 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} -1 & -2 & -3 \\ -4 & -5 & -6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 10 & -24 & 13 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 0 & 9 \end{bmatrix}.$$

2. Calcule as matrizes inversas das matrizes

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 5 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 5 \\ 0 & 0 & 7 & 6 \end{bmatrix}.$$

3. Calcule a matriz inversa da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sem efectuar cálculos, deduza qual a inversa da matriz

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Confirme o resultado, calculando $BB^{-1}$.

4. Mostre que $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ é invertível sse $ad - bc \neq 0$ e, nesse caso, determine a sua inversa.

5. Prove que se $a \neq 0$ e $a \neq b$, então a seguinte matriz é invertível:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & b \\ a & a & b \\ a & a & a \end{bmatrix}.$$

### 1.4 Sistemas

1. Resolva os seguintes sistemas de equações lineares usando o método de eliminação de Gauss. Interprete geometricamente os resultados.

(a) $\begin{cases} x - y + 2z + t = 5 \\ x - 4y - z - 2t = 14 \\ -2x + 2y + z + t = -7 \\ x - 7y + z + 2t = 10 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x - 3y + 2z - t = 6 \\ 3x - 7y + t = 0 \end{cases}$

(c) $\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x - y + 3z = 2 \\ 4x + y + z = 5 \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + y = 3 \\ x - y = 1 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x + y + z = 8 \\ x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$

(f) $\begin{cases} x + y + 4z = 15 \\ 3y + 2z = 9 \end{cases}$

(g) $\begin{cases} -x + 2y = 0 \\ 3x - 6y = 1 \end{cases}$

(h) $\begin{cases} x + 7y = 2 \\ 2x - 8y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$

2. Considere o seguinte sistema de equações lineares:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - x_3 - x_4 = 0 \\ 3x_2 = -2x_4 \\ 2x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

(a) Escreva a equação matricial do sistema.

(b) Justifique a seguinte afirmação: *O sistema nunca é impossível.*

(c) Resolva o sistema pelo método de eliminação de Gauss.

3. Classifique os sistemas $[A|b]$, onde $b$ é um vector arbitrário de $\mathbb{R}^n$ e $A$ é a matriz:

(a) $\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

(b) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & -4 \end{bmatrix}$

(c) $\begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$

(d) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

4. Classifique os seguintes sistemas de equacões em função dos parâmetros $\alpha$ e $\beta$:

(a) $\begin{cases} x + y = 15 \\ \alpha x + \beta y = 1 \end{cases}$

(b) $\begin{cases} x + y = \alpha \\ 2x + 2y = \beta \end{cases}$

(c) $\begin{cases} \alpha x + \beta y = \alpha + \beta \\ 2x - 2\beta y = \beta \end{cases}$

(d) $\begin{cases} x + 2y - \alpha z = 1 \\ 2x - y - z = \beta \\ 9x - 2y + z = -1 \end{cases}$

(e) $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 - 2x_4 = 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 + 2\alpha x_4 = \beta \end{cases}$

(f) $\begin{cases} \alpha x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ x_2 + 2x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_3 + 2x_4 = \beta \end{cases}$

5. Considere o seguinte sistema de equações lineares com variáveis $x$, $y$ e $z$:

$$\begin{cases} 2x + y + z = -6\alpha \\ 2x + y + (\beta + 1)z = 4 \\ \beta x + 3y + 2z = 2\alpha \end{cases}$$

   (a) Escreva o sistema na forma matricial.

   (b) Estude a natureza do sistema em função dos parâmetros $\alpha$, $\beta$.

6. Considere o seguinte sistema de equações lineares com variáveis $x$, $y$, $z$ e $t$:

$$\begin{cases} -y + z = -(b - a)t - bx \\ y + (a + 1)t = -bz \\ 2z + 2t = -x \\ 2a + at = -y - z \end{cases}$$

   (a) Escreva a equação matricial do sistema.

   (b) Classifique, pela teoria das matrizes, o sistema em função dos parâmetros $a$ e $b$.

   (c) Suponha $a = 1$ e $b = 0$. Use os resultados e os cálculos da alínea anterior para resolver o sistema.

7. Seja

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \alpha & 1 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 \\ \alpha & 1 & \alpha \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   onde $\alpha$ é um parâmetro real.

   (a) Escreva o sistema $A_\alpha X = B$.

   (b) Determine o único $\alpha$ para o qual $A_\alpha X = B$ é impossível.

   (c) Considerando $\alpha = 1$, determine o conjunto solução do sistema $A_1 X = B$.

8. Sejam $p$ e $q$ números reais tais que $p+q=1$. Mostre que se $X_1$ e $X_2$ são soluções de um sistema de equações lineares $Ax=b$, então $pX_1+qX_2$ também é uma solução do sistema. Conclua que $Ax=b$ tem infinitas soluções.

9. Mostre que se $A$ é quadrada e $[A|b]$ corresponde a um sistema impossível, então $[A|c]$ é impossível ou possível indeterminado para todo o vector coluna $c$.

10. Mostre que se $A$ é quadrada e $[A|b]$ é possível e determinado, então $[A|c]$ é possível e determinado para todo o vector coluna $c$.

## 1.5 Determinantes e propriedades

1. Calcule o determinante das seguintes matrizes:

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad B=\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{bmatrix} \quad C=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \quad D=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

$$E=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad F=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad G=\begin{bmatrix} 2 & a & b \\ 0 & 3 & c \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \quad H=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ a & 3 & 0 \\ b & c & 4 \end{bmatrix}$$

$$I=\begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 3 & -6 & 9 \\ 2 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad J=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 5 \\ 3 & 0 & 9 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad K=\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$L=\begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 \\ 5 & -9 & 6 & 3 \\ -1 & 2 & -6 & -2 \\ 2 & 8 & 6 & 1 \end{bmatrix} \quad M=\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \quad N=\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

2. Usando determinantes verifique se os seguintes sistemas de vectores são linearmente independentes:

   (a) $\{(1,1),(1,2)\}$ (b) $\{(1,1),(2,2)\}$

   (c) $\{(1,1,1),(1,0,1),(0,1,1)\}$ (d) $\{(2,1,4),(0,1,2),(1,0,1)\}$

3. Verifique que para matrizes $2\times 2$ se tem $|AB|=|A||B|$.

4. Sabendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 4$$

   deduza os seguintes determinantes (sem os calcular diretamente):

   (a) $\begin{vmatrix} a & b & c \\ -2d & -2e & -2f \\ g & h & i \end{vmatrix}$

(b) $\begin{vmatrix} a & b+3a & c \\ d & e+3d & f \\ g & h+3g & i \end{vmatrix}$

(c) $\begin{vmatrix} a & -c & b \\ d & -f & e \\ g & -i & h \end{vmatrix}$

(d) $\begin{vmatrix} a & 3b & -2c \\ d & 3e & -2f \\ g & 3h & -2i \end{vmatrix}$

5. Seja $B \in M_{12\times 12}$ a matriz que se obtém a partir de $A$ usando as operações:

$$\text{i) } l_1 \leftrightarrow l_4; \quad \text{ii) } l_2 \to l_2 + 5\,l_6; \quad \text{iii) } l_1 \to 3\,l_1.$$

Sabendo que $\det(B) = 8$, calcule $\det(A)$.

6. Seja $B \in M_{7\times 7}$ a matriz que se obtém a partir de $A$ usando as operações:

i) $l_5 \to l_5 - 3\,l_2$; ii) $l_4 \to l_4 + l_2$; iii) $l_1 \to 3\,l_1$; iv) $l_7 \to -2\,l_7$; v) $c_3 \leftrightarrow c_4$.

Sabendo que $\det(A) = -3$, calcule $\det(B)$.

7. Calcule:

(a) $\det(A^2)$

(b) $\det(2A)$

(c) $\det\left(A^{-1}\right)$

(d) $\det\left(A^t\right)$

(e) $\det(AB)$

(f) $\det\left(3A^2B^{-2}A^t\right)$

(g) $\det\left(A^{-1}B^t\right) + \det\left(AB^2\right)$

(h) $\det(-AB) + \left(\det(AB)^{-1}\right)$

(i) $\det\left((A^{-1})^t\right) + \det\left((-2AB)^t\right)$

(i) sabendo que $A, B \in M_{3\times 3}$ são invertíveis e que $\det(A) = 2$ e $\det(B) = 3$;

(ii) sabendo que $A, B \in M_{2\times 2}$ são invertíveis e que $\det(A) = -1$ e $\det(B) = 2$.

8. Dadas matrizes $A$ e $B$ de ordem $n$, mostre que se $A$ não é invertível então $AB$ não é invertível.

9. Dadas matrizes $A$ e $C$ de ordem $n$, mostre que se $C$ invertível então $\det\left(C^{-1}AC\right) = \det(A)$.

10. Uma matriz $A$ de ordem $n$ diz-se ortogonal se $AA^t = I$. Mostre que se $A$ é ortogonal então $|A| = \pm 1$.

11. Verdadeiro ou falso. Justifique.

(a) $\det(A + B) = \det(A) + \det(B)$.

(b) $\det(AB - BA) = 0$.

(c) Os vectores das colunas de uma matriz $A$ de ordem $n$ são linearmente independentes se e só se $\det(A) \neq 0$.

(d) Se $A$ é uma matriz de ordem $n$, o sistema homogéneo $Ax = 0$ tem uma solução não nula se e só se $\det(A) = 0$.

## 1.6 Inversão de matrizes

1. Usando determinantes, determine, se possível, as inversas das seguintes matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

2. Seja $A = \begin{bmatrix} k & k^2 & 0 \\ 0 & k^3 & 4 \\ -k & 0 & k \end{bmatrix}$. Determine para que valores de $k$ a matriz $A$ não é invertível.

3. Seja $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ \alpha & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$. Para que valores de $\alpha$ é invertível a matriz $A$? Calcule $A^{-1}$ para os casos em que existe.

4. Demonstre as seguintes propriedades da matriz adjunta:

   (a) $|\widehat{A}| = |A|^{n-1}$.

   (b) $\widehat{AB} = \widehat{B}\widehat{A}$.

## 1.7 Espaços vetoriais. Subespaços vetoriais. Combinação linear. Span.

1. Determine se os seguintes conjuntos são subespaços de $\mathbb{R}^n$. Represente graficamente os que são subespaços de $\mathbb{R}^2$.

   (a) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \leq 3\}$.

   (b) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : -3x = y\}$.

   (c) $V = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y + 1\}$.

   (d) $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 = y^2\}$.

   (e) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = 2y - z, \}$.

   (f) $V = \{(x, -x, y - x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\}$.

   (g) $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = x - y, y = 2\}$.

   (h) $V = \{(a - b, b - c, c - d, d - a) \in \mathbb{R}^4 : a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$.

   (i) $V = \{(x_1, 2x_2, 3x_3, 4x_4) \in \mathbb{R}^4 : x_i \in \mathbb{R}\}$.

   (j) $V = \{(x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_{n-1} = 0 \in \mathbb{R}\}$.

2. Determine se as colunas das seguintes matrizes são linearmente independentes:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 3 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 4 \\ 1 & 0 & 5 \end{bmatrix},$$

$$E = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 4 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \end{bmatrix}, \quad G = \begin{bmatrix} 0 & 2 & 3 & 4 \\ -4 & 4 & -2 & 8 \\ 3 & 3 & 2 & 6 \\ -1 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

3. Verifique se $u_1 = (1, 2, 3, 4)$, $u_2 = (2, 2, 3, 4)$, $u_3 = (3, 3, 3, 4)$ são linearmente independentes.

4. Prove que se $\{v_1, v_2, v_3\}$ é um conjunto de vetores linearmente independentes, então também o é o conjunto $\{v_1 - v_2, v_2 - v_3, v_3 + v_1\}$.

5. Sejam $v_1, v_2, v_3$ vetores de $\mathbb{R}^n$. Prove que os vetores $w_1 = v_1 + 3v_3$, $w_2 = -v_1 + v_2 - 5v_3$ e $w_3 = v_2 - 2v_3$ são linearmente dependentes.

6. Verifique se $(1, 4, -2) \in \text{span}\{u_1, u_2\}$:

   (i) $u_1 = (1, 0, 0)$, $u_2 = (0, -2, 1)$

   (ii) $u_1 = (1, 0, 1)$, $u_2 = (1, 1, 0)$

7. Determine bases para o conjunto

$$S = \text{span}\{(1, 2, 0, 1), (2, 3, 0, 0), (0, 1, 0, 1), (-1, 0, 0, 2)\}.$$

8. Complete os seguintes conjuntos até obter uma base de $V$.

   (a) $V = \mathbb{R}^3$
   (i) $\{(0, 0, 1), (1, 0, 1)\}$ (ii)$\{(2, 3, 1), (1, 4, 3)\}$

   (b) $V = \mathbb{R}^4$
   (i) $\{(0, 0, 0, 1)\}$ (ii) $\{(1, 1, 1, 1), (0, 1, 1, 1)\}$

9. Determine $[u]_B$, i.e., determine as coordenadas de $u$ na base $B$:

   (a) $u = (1, 2)$
   (i) $B_1 = \{(1, 0), (0, 1)\}$ (ii) $B_2 = \{(1, 1), (-1, 1)\}$.

   (b) $u = (4, 17)$
   (i) $B_1 = \{(1, 2), (1, -1)\}$ (ii) $B_2 = \{(1, 2), (0, 5)\}$

   (c) $u = (5, 4, 1)$
   (i) $B_1 = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ (ii) $B_2 = \{(1, 0, 0), (0, 2, 0), (1, 1, 1)\}$

10. Verdadeiro ou falso. Justifique.

    (a) O subconjunto $\{0, u\}$ de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

    (b) Qualquer conjunto de $n+1$ vetores distintos de $\mathbb{R}^n$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

(c) Seja $S$ um conjunto de vetores linearmente dependentes em $\mathbb{R}^n$. Então qualquer subconjunto $T \subsetneq S$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

(d) Seja $S$ um conjunto de vetores linearmente independentes em $\mathbb{R}^n$. Então qualquer subconjunto $T \subsetneq S$ é um conjunto de vetores linearmente independentes.

(e) Seja $S = \{u_1, \ldots, u_k\}$ um conjunto de vetores linearmente dependentes em $\mathbb{R}^n$. Então $T = \{u_1, \ldots, u_k, u_{k+1}\}$ é um conjunto de vetores linearmente dependentes.

(f) Quaisquer quatro vectores distintos de $\mathbb{R}^4$ geram $\mathbb{R}^4$.

(g) Se $\{v_1, v_2\}$ é uma base de $W = \text{span}\{v_1, v_2\}$, então $\{v_1+v_2, v_1-v_2, 3v_1-2v_2\}$ também é uma base de $W$.

## 1.8 Transformações lineares

**Notação:**

$M(T, B_1, B_2)$ denota a matriz que representa a transformação $T$ em relação às bases $B_1$ e $B_2$.

*b.c.* denota a base canónica.

1. Verifique se são lineares as seguintes funções:

   (a) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x + y, x - y)$

   (b) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (x^2, y)$

   (c) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y) = (2x, 1)$

   (d) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x + y, y, 0)$

   (e) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $T(x, y, z) = (x - y, y - 4z, x)$

   (f) $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $T(x, y, z) = (xy, -y)$

   (g) $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, $T(x, y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

2. Determine a expressão analítica da transformação linear

$$T(1, 0) = (1, 2), \quad T(0, 1) = (1, -1).$$

3. Seja $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^5$ uma função linear definida por:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 - x_3 + 2x_4, x_1 + 2x_3 - x_4, x_2 - x_3 - x_4, x_3 - x_4, x_2 - 2x_3).$$

   (a) Determine uma base de $\text{Ker}(f)$.

   (b) Determine uma base de $\text{Im}(f)$

4. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ uma transformação definida por:

$$f(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z).$$

   (a) Mostre que $f$ é uma transformação linear.
   (b) Determine a matriz da transformação.
   (c) Determine $\text{Ker}(f)$ e $\dim(\text{Im}(f))$.

5. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ uma transformação definida por:

$$f(x, y, z) = (y - x, 0, z - x, z - 2y).$$

   (a) Mostre que $f$ é uma transformação linear.
   (b) Determine a matriz da transformação.
   (c) Determine $\text{Ker}(f)$.
   (d) Calcule $\dim(\text{Im}(f))$.

6. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$T(x, y) = (x + y, -2x + y, x - y).$$

   (a) Calcule $T(1, 2)$.
   (b) Determine $A = M(T, b.c., b.c.)$.
   (c) Calcule $T(1, 2)$ usando a matriz $A$. Confirme o resultado com o obtido na alínea (a).
   (d) Determine $B = M(T, B_1, B_2)$, onde $B_1 = b.c.$ e $B_2 = \{(1, -1, 0), (0, 1, 0), (1, 0, 1)\}$.
   (e) Calcule $T(1, 2)$ usando a matriz $B$. Confirme o resultado com os obtidos nas alíneas (a) e (c).

7. Considere a transformação linear $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ definida por

$$A = M(T, b.c., b.c.) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 4 \end{bmatrix}$$

   (a) Calcule $T(1, 1, 1)$.
   (b) Determine a expressão analítica de $T$, $T(x, y, z)$.
   (c) Determine $B = M(T, B_1, B_1)$, onde $B_1 = \{(1, 1, 0), (0, -1, 0), (1, 1, 1)\}$
   (d) Calcule $T(1, 1, 1)$ usando a matriz $B$. Confirme o resultado com o obtido na alínea (a).
   (e) Calcule $T((1, 2, 3)_{B_1})$.

8. Considere as seguintes situações:

   (a) $T(x,y,z) = (x-y, 2z)$, $L(x,y) = (2x, 3y)$,
   $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $B_2 = b.c.$, $B_3 = \{(1,1),(1,0)\}$,
   $u = (-2,3,1)$.

   (b) $T(x,y) = (3x, 2y)$, $L(x,y) = (x, y, x+2y)$,
   $B_1 = b.c.$, $B_2 = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_3 = b.c.$,
   $u = (-2,3)$.

   Determine, em cada caso:

   (i) a expressão analítica de $L \circ T$;

   (ii) as matrizes $A = M(T, B_1, B_2)$ e $B = M(L, B_2, B_3)$;

   (iii) a matriz $C = M(L \circ T, B_1, B_3)$, primeiro usando (i) e em seguida usando (ii);

   (iv) $(L \circ T)(u)$ usando (i) e (iii).

9. Seja $T : V \to V$ linear e $A = M(T, B_1, B_2)$. Verifique que as seguintes são equivalentes:

   (a) $T$ é invertível. (b) $\mathrm{Ker}(T) = \{0\}$.

   (c) $A$ é invertível. (d) $r(A) = \dim(V)$.

10. Considere os seguintes casos:

    (a) $T(x,y) = (x-y, x+y)$,
    $B_1 = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_2 = b.c.$,
    $u = (-1,2)$.

    (b) $T(x,y) = (x, 0)$,
    $B_1 = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_2 = b.c.$,
    $u = (0,2)$.

    (c) $T(x,y,z) = (x-y, x+y, z)$,
    $B_1 = \{(1,1,0),(1,0,0),(0,0,1)\}$, $B_2 = b.c.$,
    $u = (-1,2,-3)$.

    Verifique, em cada caso, se $T : V \to V$ é invertível e em caso afirmativo determine:

    (i) a expressão analítica de $T^{-1}$;

    (ii) $A = M(T, B_1, B_2)$;

    (iii) $B = M(T^{-1}, B_2, B_1)$, primeiro usando (i) e depois usando (ii);

    (iv) $T^{-1}(u)$ usando (i) e (iii).

11. Considere os seguintes casos:

    (a) $B_1 = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_2 = \{(1,2),(2,1)\}$ e $u = (-2,3)$.
    (b) $B_1 = \{(1,1),(1,0)\}$, $B_2 = b.c.$ e $u = (-2,3)$.
    (c) $B_1 = b.c.$, $B_2 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$ e $u = (-2,3,-4)$.

    Para cada um deles:

    (i) determine as coordenadas de $u$ nas bases $B_1$ e $B_2$;
    (ii) determine a matriz mudança de base de $B_1$ para $B_2$, $A = M(\mathrm{id}, B_1, B_2)$;
    (iii) determine a matriz mudança de base de $B_2$ para $B_1$, $B = M(\mathrm{id}, B_2, B_1)$;
    (iv) verifique que $B = A^{-1}$;
    (v) verifique que a denominação "mudança de base" é a correta.

12. Considere os casos seguintes:

    (a) $T(x,y,z) = (x-y, 2x)$,
    $B_1 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$, $B_2 = b.c.$, $B_3 = b.c.$ e $B_4 = \{(1,1),(1,0)\}$.
    (b) $T(x,y) = (x+2y, x)$,
    $B_1 = B_2 = b.c.$ e $B_3 = B_4 = \{(1,1),(1,0)\}$.
    (c) $T(x,y) = (x,y,0)$,
    $B_1 = B_3 = b.c.$ e $B_2 = B_4 = \{(1,1,1),(1,1,0),(1,0,0)\}$.

    Determine, para cada um deles, as matrizes $A = M(T, B_1, B_2)$ e $B = M(T, B_3, B_4)$ usando dois processos:

    (i) a expressão analítica de $T$;
    (ii) a matriz $A$ e matrizes mudança de base.

## 1.9 Valores e vetores próprios

1. Sejam
$$A = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 6 & 0 \end{bmatrix}.$$

    (a) Mostre que $u = (-3,3)$ e $v = (2,1)$ são vetores próprios de $A$. Indique os valores próprios associados.
    (b) Mostre que qualquer vetor da forma $(-r, r)$, $r \neq 0$, é vetor próprio de $A$.
    (c) Mostre que $u = (1,0,0)$ é vetor próprio de $B$ e indique o valor próprio associado.
    (d) Mostre que $-6, 4, 7$ são valores próprios de $B$.

2. Considere as seguintes matrizes:

   (a) $\begin{bmatrix} 0 & -9 \\ 1 & -6 \end{bmatrix}$

   (b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix}$

   (c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$

   (d) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

   (e) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

   (f) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 5 \end{bmatrix}$

   Para cada uma delas, determine:

   (i) os valores próprios;

   (ii) bases de vetores próprios para os subespaços próprios.

3. Determine os vetores próprios das seguintes funções lineares:

   (a) $T(x, y) = (-x, -y)$

   (b) $P(x, y) = (x, 0)$

   (c) $R(x, y) = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$

4. Seja $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ a função linear definida por

$$T(x, y, z) = (x + z, y, x + z).$$

   Determine os valores e vetores próprios de $T$.

5. Para cada uma das matrizes que se seguirão

   (a) determine os seus valores próprios, vetores próprios e subespaços próprios;

   (b) verifique se a matriz é diagonalizável;
   Se a resposta à última alínea for positiva,

   (c) diagonalize-a (i.e., determine uma matriz diagonal $D$ semelhante à matriz em causa) e indique a base a que esta diagonalização se refere;

(d) usando $D$, calcule o seu determinante;

(i) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$ (ii) $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ (iii) $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ (iv) $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

(v) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ (vi) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ (vii) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$

6. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ a função linear definida pela matriz

$$A = M(f; b.c, b.c.) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

(a) Determine os valores e os vetores próprios de $f$.

(b) Encontre uma base $B = \{v_1, v_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ formada por vetores próprios de $f$. Determine a matriz $D$ de $f$ com respeito a essa base, i.e. determine $D = M(f; B, B)$. Prove que se $P$ é a matriz cujas colunas são as componentes dos vetores $v_1$ e $v_2$ na base canónica, então

$$D = P^{-1}AP.$$

7. Seja $A$ uma matriz $3 \times 3$ tal que $Au_1 = u_1$, $Au_2 = u_2$ e $Au_3 = 3u_3$, onde $u_1, u_2, u_3 \neq 0$. Sabendo que $\{u_1, u_2\}$ são linearmente independentes, justifique se são verdadeiras ou falsas as seguintes afirmações:

(a) $\{u_1, u_2, u_3\}$ é uma base de $\mathbb{R}^3$.

(b) $|A| = 3$.

(c) $A$ é invertível.

8. Mostre que se $A$ é uma matriz quadrada de ordem $n$, então $AA^t$ e $A^tA$ têm os mesmos valores próprios.

9. Mostre que uma matriz quadrada $A$ é invertível se e só se os seus valores próprios são não nulos.

10. Mostre que se $A$ e $C$ são matrizes semelhantes (i.e. $C = S^{-1}AS$) então $\det(A)$=$\det(C)$.

11. (a) Mostre que se $u$ e $v$ são vetores não nulos linearmente dependentes, e $u$ é um vetor próprio de $A$ com valor próprio $\lambda$, então $v$ também é um vetor próprio de $A$ com valor próprio $\lambda$.

(b) Usando a alínea anterior conclua que:

*A valores próprios distintos correspondem vetores próprios linearmente independentes.*