DEPARTAMENTO MÉTODOS QUANTITATIVOS

MATEMÁTICA
Exame 2^a época

24/01/2011

Duração: 2h+30m

Nome N^o

Curso Turma

Nome do Docente

- Não é permitido o uso de **calculadora** nem de **formulário**. Não devem ser esclarecidas **dúvidas** durante a prova.
- Todos os alunos deverão ter o **telemóvel desligado**.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado. Estas devem **permanecer agrafadas** durante todo o tempo da prova. Apresente **todas as justificações** necessárias.
- Não são permitidas **folhas de rascunho** adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A **folha de rascunho** que constitui o final da prova pode ser usada excepcionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalada.
- Os alunos só poderão **desistir da prova** após os primeiros 30 minutos de início da mesma, deixando indicação dessa decisão nas folhas do enunciado.

1. Considere o sistema

$$\begin{cases} x + y + 3z = 0 \\ y + z = 1 \\ 2x - y + az = b. \end{cases}$$

- (0.5 val.) Escreva o sistema na forma matricial.
- (1.0 val.) Discuta a natureza do sistema em função dos parâmetros reais a e b .
- (1.5 val.) Resolva o sistema pela Regra de Cramer para o caso em que $a = 1$ e $b = 0$.

2. Considere os vectores de $\mathbb{R}^3$:

$$\vec{v}_1 = (1, -1, -2), \quad \vec{v}_2 = (5, -4, -7), \quad \vec{v}_3 = (-3, 1, 0)$$

- (a) (1.0 val.) Mostre que os vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$ são linearmente dependentes e estabeleça uma relação de dependência linear entre eles.
- (b) (0.5 val.) O espaço vectorial $\mathbb{R}^3$ pode ser gerado pelos vectores $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3$? Justifique.
- (c) (1.0 val.) Determine $\vec{u}$ de forma a que $\{\vec{v}_1, \vec{v}_3, \vec{u}\}$ seja uma base de $\mathbb{R}^3$.

3. Seja $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ a transformação linear definida por:

$$T(x, y, z) = (x - 2y, y - z, 2x + z).$$

- (a) (1.0 val.) Determine a matriz A que representa a transformação T relativamente à base canónica.
- (b) (1.0 val.) Determine o núcleo de T . O que pode concluir quanto à invertibilidade da transformação T ?

4. Considere a transformação de $\mathbb{R}^2$ em $\mathbb{R}^2$ representada na base canónica pela matriz:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$$

- (a) (1.5 val.) Calcule os valores e vectores próprios de A .
- (b) (1.0 val.) Existirá alguma base em $\mathbb{R}^2$ na qual a matriz da transformação linear é representada por uma matriz diagonal? Justifique. Em caso afirmativo, indique a nova base e a matriz diagonal.

5. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{3x^3 + y^3}{x^2 + y^2} & \text{se } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{se } (x, y) = (0, 0) \end{cases}.$$

- (a) (1.0 val.) Mostre que f é contínua na origem.
- (b) (1.5 val.) Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)$.

(c) (1.0 val.) Verifique que f não é diferenciável na origem.

6. Para a função

$$g(x, y) = \sin(x) + e^{xy^2},$$

determine:

(a) (1.5 val.) $\frac{\partial g}{\partial x}$ e $\frac{\partial g}{\partial y}$.

(b) (0.75 val.) $g_{\vec{u}}(0, 2)$ para $\vec{u} = (3, 2)$.

(c) (0.75 val.) a derivada dirigida de g em $(0, 2)$ na direção de crescimento máximo.

7. Seja $h(x, y) = x^2 w(u, v)$, onde $u = xy$ e $v = x$.

(a) (1.25 val.) Calcule $\frac{\partial h}{\partial x}$.

(b) (0.5 val.) Sabendo que

$$u \frac{\partial w}{\partial u} + v \frac{\partial w}{\partial v} = 0,$$

o que pode concluir quanto à homogeneidade de w .

(c) (0.75 val.) Tendo em conta a alínea anterior, verifique que

$$x \frac{\partial h}{\partial x} = 2h(x, y).$$

(d) (1.0 val.) Mostre que

$$x \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} = \frac{\partial h}{\partial x}.$$

FOLHA DE RASCUNHO (atenção: mantenha esta folha **agrafada** às anteriores)