ISCTE - IUL

Matemática

Licenciaturas em Gestão, Gestão de Marketing, Finanças e Contabilidade,
Gestão Industrial e Logística

12 de Janeiro de 2015

Ano Lectivo 2014/2015, 1º semestre

Tipo de prova: Frequência/ Exame 1ª época Duração: 1h15/ 2h30

Nome do aluno: Uma proposta de Resolução.

Número do aluno:

Turma:

Docente:

Observações:

1. A prova deve ser efectuada sem consulta e sem a utilização de máquina de calcular.
2. Não é permitido escrever a lápis ou a caneta de tinta vermelha.
3. Não destaque as folhas do teste.
4. Apresente todas as justificações necessárias.
5. Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito e pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.
6. Durante a prova o telemóvel deve estar desligado.
7. Não se tiram dúvidas durante a prova.
8. Os alunos que realizam **Exame** devem responder a todas as questões da **Parte I e II**, isto é, às questões 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7.
   Os alunos que realizam **Frequência** devem responder a todas as questões da **Parte II**, isto é, às questões 5, 6 e 7.
9. A cotação assinalada junto a cada questão é a de exame. A cotação de frequência é o dobro.

Cotações:

Parte I

1. a)

   b)

   c)

2.

3.

4 a)

   b)

   c)

   d)

Parte II

5. a)

   b)

   c)

   d)

   e)

6. a)

   b)

   c)

   d)

7.

Parte I (Exame)

1. Considere o sistema de equações lineares em x, y e z, parametrizado por $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2b \\ x - 2y + az = 3 \\ 2x - 7y - z = 3b \end{cases}$$

(0.5 val.) (a) Escreva o sistema na forma matricial $AX = B$, e diga como se denominam cada uma das matrizes desta equação.

$$\begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2b \\ 3 \\ 3b \end{bmatrix}$$

$A = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & a \\ 2 & -7 & -1 \end{bmatrix} \rightarrow$ Matriz dos Coeficientes

$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \rightarrow$ Matriz das incógnitas

$B = \begin{bmatrix} 2b \\ 3 \\ 3b \end{bmatrix} \rightarrow$ Matriz dos termos independentes.

(1.5 val.) (b) Discuta a sua natureza em função dos parâmetros a e b, pelo método de eliminação de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2b \\ 1 & -2 & a & 3 \\ 2 & -7 & -1 & 3b \end{array}\right] \xrightarrow[L_3 \to L_3 - 2L_1]{L_2 \to L_2 - L_1} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2b \\ 0 & 1 & a-1 & 3-2b \\ 0 & -1 & -3 & -b \end{array}\right] \longrightarrow$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2b \\ 0 & 1 & a-1 & 3-2b \\ 0 & 0 & a-4 & 3-3b \end{array}\right]$$

- Se $a \neq 4 \wedge \forall b \in \mathbb{R} \Rightarrow r(A) = 3 =$ nº Colunas $\Rightarrow$ SPD
- Se $a = 4 \wedge b = 1 \Rightarrow r(A) = 2 < 3 =$ nº Colunas $\Rightarrow$ SPI
- Se $a = 4 \wedge b \neq 1 \Rightarrow$ SI.

(1.0 val.) (c) Resolva-o para o caso de $a = 4$ e $b = 1$.

Por b) para $a=4$ e $b=1$ temos SPI

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

$$\begin{cases} x - 3y + z = 2 \\ y + 3z = 1 \\ 0 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = 5 - 10z \\ y = 1 - 3z \end{cases}$$

$(5-10z, 1-3z, z)$, $z \in \mathbb{R}$.

(1.0 val.) 2. Determine para que valores de $x \in \mathbb{R}$ os vetores $(1, x, x^2), (1, 2, 4)$ e $(1, 3, 9)$ geram $\mathbb{R}^3$. Justifique.

Os vectores $(1, x, x^2), (1, 2, 4)$ e $(1, 3, 9)$ geram $\mathbb{R}^3$ se forem L.I.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 2-x & 3-x \\ 0 & 4-x^2 & 9-x^2 \end{vmatrix} =$$

$= (2-x)(9-x^2) - (3-x)(4-x^2)$

$= (2-x)(3-x)(3+x) - (3-x)(2-x)(2+x)$

$= (2-x)(3-x)(3+\cancel{x}-2-\cancel{x})$

$= (2-x)(3-x)$

Os 3 vectores são L.I. se $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & 2 & 3 \\ x^2 & 4 & 9 \end{vmatrix} \neq 0$, i.e., $x \neq 2 \wedge x \neq 3$

(1.0 val.) 3. Considere o subconjunto do plano $\mathbb{R}^2$ definido por:

$$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^3\}$$

Verifique se U é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. Justifique.

$$U = \{ (x, x^3), \quad x \in \mathbb{R} \}$$

i) $(0,0) \in U$ ✓

ii) Dados $(x,y), (x',y') \in U \Rightarrow (x+x', y+y') \in U$

Por exemplo: $(1,1), (2,8) \in U$, mas $(3,9) \notin U$.

logo U não é um subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$.

4. Considere a base canónica de $\mathbb{R}^2$, e a transformação linear $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, definida por

$$T(x, y) = (2x - y, 3x - 2y)$$

(0.5 val.) (a) Escreva a matriz de T nas bases canónicas, isto é, $M(T, b.c, b.c)$.

$T(1,0) = (2,3)$

$T(0,1) = (-1,-2)$

$$M(T, b.c, b.c) = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix}$$

(1.0 val.) (b) Calcule o núcleo de T e infira sobre a dimensão da imagem desta transformação. Justifique.

$\text{Nuc}\, T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : T(x,y) = (0,0)\}$

$T(x,y) = (0,0)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x - y = 0 \\ 3x - 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 2x \\ 3x - 4x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ x = 0 \end{cases}$$

$\text{Nuc}\, T = \{(0,0)\}$

$\dim \text{Nuc}\, T = 0$

Pelo teorema da dimensão,

$2 = \dim \text{Nuc}\, T + \dim \text{Im}\, T$

logo $\dim \text{Im}\, T = 2$

(1.5 val.) (c) Calcule os valores próprios e os vetores próprios de T, indicando os respetivos subespaços próprios.

$$|A - \lambda I| = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 \\ 3 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (2-\lambda)(-2-\lambda) + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow -4 - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 + 3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \lambda^2 = 1$$

$$\Leftrightarrow \lambda = 1 \quad \vee \quad \lambda = -1$$

$$\boxed{(A - \lambda I)u = 0}$$

$\lambda = 1$

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 3 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} u_1 = u_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

vectores próprios : (u_2, u_2), $u_2 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

subespaço próprio : Span $\{(1,1)\}$

$\lambda = -1$

$$\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ 3 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 3u_1 = u_2 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

vectores próprios : $(u_1, 3u_1)$, $u_1 \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

subespaço próprio : Span $\{(1,3)\}$.

(2.0 val.) (d) Determine a matriz de T na base $\mathcal{B} = \{(1,1), (1,3)\}$, isto é, $M(T, \mathcal{B}, \mathcal{B})$, efetuando todos os cálculos envolvidos neste processo. Comente o resultado obtido.

$$\begin{tikzcd}
\underset{b.c.}{\mathbb{R}^2} \arrow[r, "T"', "A"'] \arrow[r, "T"] & \underset{b.c.}{\mathbb{R}^2} \arrow[d, "P^{-1}"] \\
\underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2} \arrow[u, "P"] \arrow[r, "T", "B"'] & \underset{\mathcal{B}}{\mathbb{R}^2}
\end{tikzcd}$$

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

$$P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{B} &= P^{-1} A P \\
&= \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ -1/2 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 3/2 & -1/2 \\ 1/2 & -1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Como acabámos de provar, a matriz A é diagonalizável e a base que permite diagonalizar é a base formada pelos vectores próprios de A.

OU Pela alínea c) sabemos que A tem 2 valores próprios distintos, logo 2 vectores próprios L.I. Portanto A é diagonalizável e $\mathcal{B}$ é a base formada pelos vectores próprios como acabámos de confirmar na alínea d).

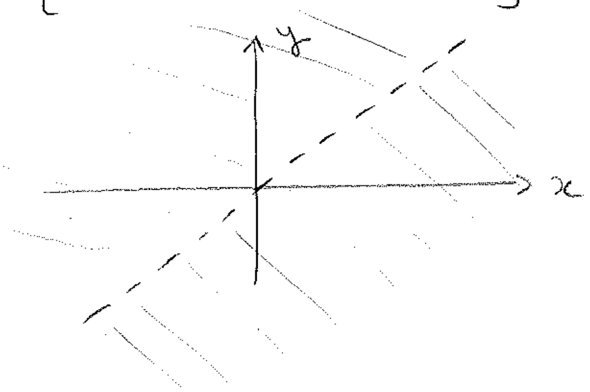
Parte II (Frequência/Exame)

5. Considere a função $f : \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definida por

$$f(x,y) = \frac{x}{x-y}$$

(0.5 val.) (a) Determine $\mathbb{D}$, e represente-o geometricamente.

$$\mathbb{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \}$$



(1.0 val.) (b) Diga se $\mathbb{D}$ é: aberto; fechado; limitado.

$$\text{int } \mathbb{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \neq y \}$$

$$\text{fr } \mathbb{D} = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = y \}$$

Como $\mathbb{D} = \text{int } \mathbb{D}$, concluímos que $\mathbb{D}$ é um conjunto aberto.

$\mathbb{D}$ não é limitado pois não existe uma bola fechada centrada na origem e de raio finito que o contenha.

(1.0 val.) (c) Diga se f é prolongável por continuidade no ponto $(0,0)$.

f é prolongável por continuidade no ponto $(0,0)$

se existir $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y)$.

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x}{x-y} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x}{x-y}\right) = \lim_{x\to 0} 1 = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x}{x-y}\right) = \lim_{y\to 0} \left(\frac{0}{-y}\right) = 0$$

Como não existe limite da função no ponto, f não é prolongável por continuidade no ponto $(0,0)$.

(1.0 val.) (d) Calcule as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$, para cada $(x,y) \in \mathbb{D}$.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{(x-y)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{(x-y)^2}$$

(1.0 val.) (e) Indique o valor da derivada direcional de f, no ponto $(1,2)$, segundo o vetor $v = (3,-5)$. Justifique o método de cálculo utilizado.

Como f é diferenciável no ponto (1,2) podemos calcular a derivada direcional de f nesse ponto da seguinte forma:

$$f'_{(3,-5)}(1,2) = 3 \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)_{(1,2)} + (-5)\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(1,2)}$$

$$= 3 \cdot (-2) + (-5) \cdot 1$$

$$= -11.$$

6. Seja $f(x,y) = (f_1(x,y), f_2(x,y))$ uma função vetorial definida em $\mathbb{R}^2 \setminus \{(x,y) : y = 0\}$, com

$$f_1(x,y) = xy$$
$$f_2(x,y) = \frac{x^3}{y}.$$

(1.0 val.) (a) Mostre que f_1 e f_2 são funções homogéneas, determine o grau de homogeneidade e verifique a identidade de Euler, para cada uma destas funções.

- $f_1(tx, ty) = t^2 xy = t^2 f(x,y)$

  f_1 é uma função homogénea de grau 2.

- $f_2(tx, ty) = \dfrac{t^3 x^3}{ty} = t^2 f(x,y)$

  f_2 é uma função homogénea de grau 2

- $x \dfrac{\partial f_1}{\partial x} + y \dfrac{\partial f_1}{\partial y} = x . y + y x = 2 f_1(x,y)$

- $x \dfrac{\partial f_2}{\partial x} + y \dfrac{\partial f_2}{\partial y} = x \dfrac{3x^2}{y} + \cancel{y}\left(-\dfrac{x^3}{y^{\cancel{2}}}\right) = 2 f_2(x,y)$.

(0.75 val.) (b) Calcule a matriz jacobiana de f, M_f.

$$M_f = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} y & x \\ \frac{3x^2}{y} & -\frac{x^3}{y^2} \end{bmatrix}$$

(1.0 val.) (c) Usando as alíneas anteriores mostre que:

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = 2 \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}.$$

$$M_f \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y & x \\ \frac{3x^2}{y} & -\frac{x^3}{y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 2xy \\ 3\frac{x^3}{y} - \frac{x^3}{y} \end{bmatrix}$$

$$= 2 \begin{bmatrix} f_1(x,y) \\ f_2(x,y) \end{bmatrix}$$

(1.25 val.) (d) Considere agora

$$F(x,y) = \frac{f_2(x,y)}{f_1(x,y)}\ g\left(\frac{x}{y}\right),$$

onde $g(.)$ é uma função que admite derivadas parciais contínuas no seu domínio. Usando a **alínea a)**, calcule a derivada direccional de F no ponto (x,y) segundo a direcção do vetor (x,y), para todo o (x,y) pertencente ao interior do domínio de F.

F é uma função homogénea do grau zero

Porque :

$$F(tx,ty) = \frac{f_2(tx,ty)}{f_1(tx,ty)}\ g\left(\frac{\cancel{t}x}{\cancel{t}y}\right)$$

$$\underset{a)}{=} \frac{\cancel{t^2}\ f_2(x,y)}{\cancel{t^2}\ f_1(tx,y)}\ g\left(\frac{x}{y}\right)$$

$$= F(x,y)$$

logo pela identidade de Euler sabemos que

$$x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

Portanto, como F admite derivadas parciais contínuas no seu domínio,

$$F'_{(x,y)}(x,y) = x\frac{\partial F}{\partial x} + y\frac{\partial F}{\partial y} = 0$$

(1.5 val.) 7. Uma função $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ diz-se *harmónica* se verificar a equação de Laplace:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Seja $f(x,y) = u(x,y) + v(x,y)$, onde u e v são funções com derivadas de segunda ordem contínuas. Mostre que se

$$u'_x(x,y) = v'_y(x,y), \quad (1)$$
$$u'_y(x,y) = -v'_x(x,y), \quad (2)$$

então f é uma função harmónica.

Comecemos por verificar que de (1) e (2) vem que u e v são funções harmónicas, i.e.,

(i) $u''_{x^2} + u''_{y^2} = 0$

e

(ii) $v''_{x^2} + v''_{y^2} = 0$

(i) • $u''_{x^2} = (u'_x)'_x \underset{(1)}{=} (v'_y)'_x = v''_{yx}$

• $u''_{y^2} = (u'_y)'_y \underset{(2)}{=} (-v'_x)'_y = -v''_{xy} = -v''_{yx}$

porque v é uma função com derivadas de 2ª ordem contínuas.

logo $u''_{x^2} + u''_{y^2} = v''_{yx} - v''_{yx} = 0$

(ii) • $v''_{x^2} = (v'_x)'_x = (-u'_y)'_x = -u''_{yx}$

• $v''_{y^2} = (v'_y)'_y = (u'_x)'_y = u''_{xy} = u''_{yx}$

porque u é uma função com derivadas de 2ª ordem contínuas.

Logo $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}$

$= \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}} + \underbrace{\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2}} \underset{(i)(ii)}{=} 0$

Folha de rascunho