ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Matemática / Matemática I (1º Ano)

Licenciaturas da Escola de Gestão

13/01/2014

Tipo de Prova: Frequência	**Parte II** (Questões 4, 5, 6 e 7)	Duração máxima: 1H 30m
Tipo de prova: Exame final	**Parte I + Parte II** (Questões 1,2,3,4,5,6 e 7)	Duração máxima: 2H 30m

Nome Completo: ……
(em maiúsculas)

Número: .... Turma ....

Docente: ………

- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Não é permitido escrever a lápis nem a caneta de tinta vermelha.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tiram dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excecionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalado.

Reservado para cotações.

Parte I

1) a)	
b)	
c)	
2) a)	
b)	
c)	
3) a)	
b)	

Parte II

4) a)	
b)	
c)	
5) a)	
b)	
c)	

6) a)	
b)	
c)	
7) a)	
b)	

PARTE I (APENAS EXAME)

[4.0 valores] 1. Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & -a \\ 1 & 0 & -3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix},$$

onde $a, b \in \mathbb{R}$.

(1.5) a) Discuta a natureza do sistema $AX = B$ em função dos parâmetros a e b.

(1.5) b) Para que valores de a a matriz A é invertível? Considere $a = 1$ e calcule a matriz inversa de A.

(1.0) c) Considerando $a = 1$ e $b = 0$, determine a solução do sistema $AX = B$, usando um dos métodos leccionados na unidade curricular.

[4.0 valores] 2. Seja S um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^3$ gerado pelos vetores:

$$\{(1,1,2),\ (1,2,0),\ (1,5,-6),\ (1,3,-2)\}.$$

(1.5) a) Indique uma base para S e a sua dimensão.

(1.5) b) Quais as coordenadas do vetor $(1,3,-2)$ nessa base?

(1.0) c) Usando os vetores acima mencionados, indique, justificando, uma base de $\mathbb{R}^3$.

[2.0 valores] 3. Seja B uma matriz 20×20 invertível.

(1.0) a) Indique, justificando, qual o resultado do produto da linha 7 da matriz B pela coluna 4 da matriz B^{-1}.

(1.0) b) Determine $\left|\hat{B}\right|$.

PARTE II (FREQUÊNCIA / EXAME)

(para os alunos que fazem a frequência, as cotações duplicam)

[2.5 valores] 4. Considere a transformação linear $T: \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$:

$$T(x, y, z) = (x + z, y, x + z).$$

(0.5) a) Escreva a matriz que representa a transformação T na base canónica de $\mathbb{R}^3$.

(1.0) b) Considere a base de $\mathbb{R}^3$:

$$\mathcal{B} = \{(1,0,1), (-1,0,1), (0,1,0)\}.$$

Determine a matriz que representa a transformação T relativamente à base $\mathcal{B}$.

(1.0) c) Justifique se T é diagonalizável. O que pode concluir quanto aos valores e vetores próprios de T?
(Nota: Caso não tenha realizado a alínea b) pode resolver a questão a partir da alínea a))

[3.0 valores] 5. Considere a função $f: D \subset \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x - \sin y}{x+y} \;, & (x,y) \neq (0,0) \\ 0 \;, & (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(1.0) a) Indique e represente graficamente o domínio de f.

(1.0) b) Calcule, caso exista, o limite de $f(x,y)$ no ponto $(0,0)$.

(1.0) c) Estude f quanto à continuidade e à diferenciabilidade no ponto $(0,0)$.

[3.0 valores] 6. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x,y) = x \sin y + y \cos x.$$

(1.0) a) Calcule o gradiente de f no ponto $(0,0)$.

(1.0) b) Usando $f(0,0)$, calcule por aproximação a imagem do ponto $(0.01;\ -0.01)$.

(1.0) c) Calcule a matriz hessiana da função f no ponto $(0,0)$.

[1.5 valores] 7. Considere a função $g: \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$g(x, y) = x^2 h(x) + y^2 h(y),$$

onde $h: \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável e homogénea de grau 2.

(1.0) a) Verifique que $x g'_x + y g'_y = 4g$.

(0.5) b) O que pode concluir da igualdade anterior?

Folha de Rascunho