Matemática / Matemática I (1º Ano)

Licenciaturas da Escola de Gestão

14/01/2013

Tipo de Prova: Frequência	**PARTE II** (Questões 3 e 4)	Duração máxima: 1H 30m
Tipo de Prova: Exame Final	**PARTE I + PARTE II** (Questões 1, 2, 3 e 4)	Duração máxima: 2H 30m

PARTE I (APENAS EXAME)

[6.5 valores] 1. Considere o sistema de equações lineares em x, y e z, e parametrizado por $a \in \mathbb{R}$:

$$\begin{cases} (1+a)x + (1+a)y + 2z = a(1+a) \\ x + y + z = 1 \\ ax + y + z = a \end{cases}$$

(1.0) a) Escreva-o na forma matricial.

(0.5) b) Indique a sua matriz ampliada.

(3.0) c) Discuta a sua natureza em função do parâmetro a.

(1.0) d) Resolva-o, pela regra de Cramèr, para $a = 2$.

(1.0) e) Verifique se existe algum valor de a que torna a equação $x + y + z = 3$ compatível com o sistema.

[3.5 valores] 2. Considere a matriz

$$M = \begin{bmatrix} -2b & 2b & b \\ 1 & 2-b & b-1 \\ -b & b & b-1 \end{bmatrix}$$

(2.0) a) Use as propriedades dos determinantes para escrever o determinante de M na forma: $\det M = \alpha b^3 + \beta b^2 + \gamma b + \delta$, indicando os valores dos coeficientes α, β, γ e δ.

(1.5) b) Suponha agora que as colunas da matriz M são vetores de $\mathbb{R}^3$. Diga para que valores de $b \in \mathbb{R}$ esses vetores formam uma base daquele espaço vetorial.

PARTE II (FREQUÊNCIA / EXAME)

(para os alunos que fazem a frequência, as cotações duplicam)

[5.0 valores] 3. Considere a base canónica de $\mathbb{R}^2$, e a transformação linear $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida pela fórmula

$$T(x, y) = (x + 2y, 2x + y)$$

(3.0) a)

- (0.5) i) Determine a matriz de T, e designe-a por A.
- (1.5) ii) Calcule os valores próprios e os vetores próprios de A.
- (1.0) iii) Mostre, sem efetuar cálculos, que T é diagonalizável e indique uma matriz diagonalizadora da transformação, isto é, uma matriz B tal que o produto $B^{-1}AB$ seja uma matriz diagonal. Justifique detalhadamente a sua resposta.

(1.5) b) Considere agora a base de $\mathbb{R}^2$, $U = \{\vec{u}_1 = (2,1); \vec{u}_2 = (1,1)\}$

- (1.0) i) Determine a matriz de T na base U, e designe-a por A'.
- (0.5) ii) Calcule os valores próprios A'. Estaria à espera de um resultado diferente? Porquê?

(0.5) c) Como classificaria a forma quadrática $Q(x, y)$ se soubesse que a sua matriz é a mesma que a da transformação T?

[5.0 valores] 4. Considere a função $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{y^3}{x^2 + y^2} & \Leftarrow \quad (x, y) \neq (0,0) \\ \\ 0 & \Leftarrow \quad (x, y) = (0,0) \end{cases}$$

(3.5) a)

- (1.0) i) Mostre que f é contínua no ponto $(0,0)$.
- (1.0) ii) Calcule as primeiras derivadas parciais de f.
- (0.5) iii) Indique o valor da derivada direcional de f, no ponto $(1,2)$, segundo a direção do vetor $(1,1)$. Justifique o método de cálculo utilizado.
- (1.0) iv) Estude f, quanto à diferenciabilidade, no ponto $(0,0)$.

(1.5) b) Considere agora a função $h(t) = f(x, y)$, com

$$\begin{cases} x = x(t) = 2 - e^{-t} \\ \\ y = y(t) = 2\cos t \end{cases}$$

Use o teorema da derivada da função composta para indicar o valor de $h'(0)$.