ISCTE IUL
Instituto Universitário de Lisboa
Lisbon University Institute

Departamento de Métodos Quantitativos

Matemática/Matemática I

Frequência / Exame de 1ª Época 1º Ano 2011 / 2012

09/01/2012 Duração: Freq. 1h15m+15m, Exame 2h+30m

Licenciaturas da Escola de Gestão

Nome .... Nº ....

Curso .... Turma ....

Nome do Docente .... Freq.☐ Exame ☐

- **Frequência: responder às questões 5, 6, 7 e 8. Exame: responder a todas as questões.**
- **Não esquecer de assinalar se é frequência ou exame**.
- Não é permitido o uso de máquinas de calcular.
- Durante a prova deve manter o telemóvel desligado.
- Não se tira dúvidas durante a prova.
- Não destaque nenhuma folha do caderno de prova, sob pena da sua anulação.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado, as quais devem permanecer agrafadas. Apresente todas as justificações necessárias.
- Não são permitidas folhas de rascunho adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A folha de rascunho que constitui o final da prova pode ser usada excepcionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalada.

---

1. [Só Exame] Considere as matrizes:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & -2 \\ 1 & \alpha & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \beta \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix} \text{ e } X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

a) [1,0 v] Discuta a característica e a dependência linear das linhas da matriz ***A*** em função do parâmetro α.

b) [1,0 v] Escreva o sistema representado pelas matrizes. Apresente-o também na forma matricial.

c) [1,0 v] Discuta a natureza do sistema ***AX=B*** em função dos parâmetros α e β.

d) [1,0 v] No sistema da alínea b), considere α = 1 e β = 0. Determine o valor de **z** utilizando a regra de Cramer.

2. [Só Exame] Considere a matriz ***B***, dada por $\begin{bmatrix} a & -4 & b \\ 4 & 0 & 2 \\ 8 & -2 & c \end{bmatrix}$

a) [2 v] Determine o valor dos parâmetros a, b, c para os quais a matriz B é anti-simétrica (Nota: uma matriz A diz-se anti-simétrica se $A = -A^T$).

3. [Só Exame] Considere ainda o seguinte conjunto de vectores:

$$B = \{1 + x^2, 2 + 3x \ + 4x^2, -x^2\}.$$

a) [1,0 v] Mostre que os vectores de B formam uma base.

b) [1,0 v] Considere a matriz formada pelos três vectores e resolva a seguinte equação matricial

$$AX + C = 0$$

com $C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$.

4. [Só Exame] Considere a seguinte forma quadrática

$$q(x, y, z) = 2x^2 + 2xy + 4yz$$

a) [1,0 v] Escreva a matriz da forma quadrática.

b) [1,0 v] Classifique a forma.

5. Considere fixada a base canónica em R^3 e considere a seguinte transformação: $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_3, -x_2, 2x_1)$.

a) [1,0 v/2,0 v] Determine a matriz da transformação na base canónica.
b) [1,0 v/2,0 v] Calcule a dimensão do núcleo de T. Diga se a transformação é invertível, justificando.
c) [1,0 v/2,0 v] Calcule os valores próprios e os vectores próprios da transformação.
d) [1,0 v/2,0 v] Apresente uma base na qual a transformação T é representada por uma matriz diagonal e diga qual é essa matriz.
e) [0,5/1,0 v] Qual a relação entre as matrizes encontradas em a) e d). Justifique.

6. Considere a seguinte função

$$f(x,y) = \frac{ln\left(\sqrt{x^2+y^2-4}\right)}{x^2-y^2}$$

[1,0 v/2,0 v] Indique e represente graficamente o domínio da função.

7. Tendo por base a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy^2+2y^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 1 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

a) [1,0 v/2,0 v] Estude a continuidade da função na origem.

b) [1,0 v/2,0 v] O que pode concluir quanto à diferenciabilidade da função nesse ponto.

8. Seja

$$f(x,y) = xye^{\frac{x-y}{x+y}}$$

a) [1,0 v/2,0 v] Determine o grau de homogeneidade da função.

b) [1,0 v/2,0 v] Verifique a igualdade de Euler.

c) [0,5 v/1,0 v] Determine o diferencial de 1ª ordem da função no ponto (1,1) com $dx = 0.01$ e $dy = -0.01$.

Rascunho