

09/01/2012

7

$$a) f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2 + 2y^3}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 1 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ é uma indeterminação.

$$\text{Seu } y = mx \quad , \quad \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y = mx}} f(x, y) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(m^2x^2 + 2(m^3)x^3)}{(mx)^2 + (mx)^2} =$$

$$= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{m^2x^3 + 2m^3x^3}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(m^2 + 2m^3) \cdot x}{1 + m^2} = 0$$

Para a função ser contínua em $(0, 0)$ $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = f(0, 0)$,

mas se existir $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y) = 0$, e $f(0, 0) = 1$. Logo

a função não é contínua em $(0, 0)$.

b) Se ~~uma~~ função é diferenciável num ponto então é contínua nesse ponto. Podemos concluir que se $f'(x_0)$ não é contínua é porque não é diferenciável.

8) $f(x,y) = xy e^{\frac{x-y}{x+y}}$

a) $f(\lambda x, \lambda y) = (\lambda x)(\lambda y) e^{\frac{\lambda x - \lambda y}{\lambda x + \lambda y}} = \lambda^2 xy e^{\frac{\lambda(x-y)}{\lambda(x+y)}} = \lambda^2 xy e^{\frac{x-y}{x+y}} = \lambda^2 f(x,y)$

f é homogênea de grau $\alpha = 2$

b) $\boxed{x f'_x(x,y) + y f'_y(x,y) = \alpha f(x,y)}$ → Igualdade de Euler

$f'_x(x,y) = (xy)'_x e^{\frac{x-y}{x+y}} + (xy) \cdot \left[e^{\frac{x-y}{x+y}} \right]'_x =$

$= y e^{\frac{x-y}{x+y}} + xy \left[\frac{2y}{(x+y)^2} \right] e^{\frac{x-y}{x+y}} =$

$= y e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 + \frac{2xy}{(x+y)^2} \right]$

$f'_y(x,y) = (xy)'_y e^{\frac{x-y}{x+y}} + (xy) \left(e^{\frac{x-y}{x+y}} \right)'_y =$

$= x e^{\frac{x-y}{x+y}} + xy \left(\frac{-2x}{(x+y)^2} \right) e^{\frac{x-y}{x+y}} =$

$= x e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 - \frac{2xy}{(x+y)^2} \right]$

$x f'_x + y f'_y = xy e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 + \frac{2xy}{(x+y)^2} \right] + y x e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 - \frac{2xy}{(x+y)^2} \right] =$

$= xy e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 + \frac{2xy}{(x+y)^2} + 1 - \frac{2xy}{(x+y)^2} \right] = 2xy e^{\frac{x-y}{x+y}} = 2 f(x,y) //$ (2)

$\rightarrow (e^u)' = u' e^u$

$\left(\frac{x-y}{x+y} \right)'_x = \frac{1 - 2y}{(x+y)^2}$

$= \frac{(x+y)' - (x-y)'}{(x+y)^2} =$

$= \frac{2y}{(x+y)^2}$

$\left(\frac{x-y}{x+y} \right)'_y = \frac{-(x+y) - (x-y)}{(x+y)^2}$

$= \frac{-2x}{(x+y)^2}$

$$c) \quad df(1,1) = d_x f'_x(1,1) + d_y f'_y(1,1)$$

$$f'_x(x,y) = y e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 + \frac{2xy}{(x+y)^2} \right]$$

$$\begin{aligned} f'_x(1,1) &= 1 \cdot e^{\frac{1-1}{1+1}} \left[1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{(1+1)^2} \right] = \\ &= 1 \cdot e^0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2} \end{aligned}$$

$$f'_y(x,y) = y e^{\frac{x-y}{x+y}} \left[1 + \frac{2xy}{(x+y)^2} \right] =$$

$$f'_y(1,1) = 1 \cdot e^{\frac{1-1}{1+1}} \left[1 + \frac{2 \cdot 1 \cdot 1}{(1+1)^2} \right] = 1 \cdot e^0 \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \right) = \frac{3}{2}$$

$$df(1,1) = d_x f'_x(1,1) + d_y f'_y(1,1) = \frac{3}{2} (d_x + d_y) =$$

$$= 0$$

$$d_x = 0,01$$

$$d_y = -0,01$$