DEPARTAMENTO MÉTODOS QUANTITATIVOS

MATEMÁTICA

Frequência/Exame 1^a época

10/01/2011 Duração: Freq. 1h15m+15m, Exame 2h+30m

Nome .... N^o ....
Curso .... Turma ....

Nome do Docente ....
Tipo de prova: Exame / Frequência **(risque o que não interessa;** caso não o faça, considera-se prova de Exame)

- Não é permitido o uso de **calculadora** nem de **formulário**. Não devem ser esclarecidas **dúvidas** durante a prova.
- Qualquer aluno deve ter o **telemóvel desligado**.
- A prova deve ser resolvida unicamente nas folhas do enunciado. Estas devem **permanecer agrafadas** durante todo o tempo da prova. Apresente **todas as justificações** necessárias.
- Não são permitidas **folhas de rascunho** adicionais. A última folha do enunciado serve para esse efeito. A **folha de rascunho** que constitui o final da prova pode ser usada excepcionalmente para responder a alguma questão, desde que claramente assinalada.
- Qualquer aluno deve indicar acima (cabeçalho) o **tipo de prova** a que se propõe. Quem permanecer no local da prova após o tempo limite indicado acima para **Frequência** (1h45m), passará a ter a sua prova corrigida como Exame, mesmo que dê indicação do contrário.
- Os alunos que efectuam esta prova como **Frequência** resolvem apenas os grupos **4.**, **5.**, **6.**, **7.** e **8.**.
- Os alunos que efectuam esta prova como **Exame** resolvem apenas os grupos **1.**, **2.**, **3.**, **4.**, **5.**, **6.** e **7.**.
- Qualquer aluno só poderá **desistir da prova** após os primeiros 30 minutos de início da mesma, deixando indicação dessa decisão nas folhas do enunciado.
- As **cotações** são indicadas na ordem (**Exame/Frequência**).

1. **(Só Exame)** Considere o sistema

$$\begin{cases} x - y = 5 \\ -x + [a\,(b-3)+1]\,y + az = b - 8 \\ x - y + a\left(b^2 - 9\right) z = b + 8. \end{cases}$$

(a) *(1 val./ —)* Escreva o sistema na forma matricial.

(b) *(1 val./ —)* Discuta a natureza do sistema em função dos parâmetros reais a e b.

(c) *(1.5 val./ —)* Resolva o sistema pela Regra de Cramer para o caso em que $a = 1$ e $b = 2$.

2. **(Só Exame)** *(2 val./ —)* Considere as matrizes A, B e X regulares, sendo A uma matriz simétrica. Utilizando apenas as propriedades do cálculo matricial e justificando todos os cálculos que efectuar, explicite em ordem a X a equação matricial

$$X^T \cdot \left(B^{-1}\right)^T \cdot \hat{A} = \left[(B \cdot A)^{-1} \cdot (B - X)\right]^T \cdot |A| \,.$$

3. **(Só Exame)** Considere os vectores

$$\overrightarrow{u}_1 = (1, -1, 2)\,, \qquad \overrightarrow{u}_2 = (3, -1, 1) \qquad \text{e} \qquad \overrightarrow{u}_3 = (0, a, -2)\,.$$

com coordenadas na base canónica.

(a) *(1 val./ —)* Determine a de modo que o vector $\overrightarrow{u}_3$ pertença ao subespaço gerado por $\overrightarrow{u}_1$ e $\overrightarrow{u}_2$.

(b) *(1.5 val./ —)* Considere $a = 4$. Mostre que o conjunto de vectores $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$ formam uma base de $\mathbb{R}^3$.

(c) *(2 val./ —)* Seja $a = 4$. Determine as cordenadas do vector $\overrightarrow{v} = (2, 5, -1)$ na base $\{\overrightarrow{u}_1, \overrightarrow{u}_2, \overrightarrow{u}_3\}$.

4. **(Exame/Freq.)** Considere a transformação linear T de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_2} - 2\overrightarrow{e_1},$$

$$T(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_1} + 2\overrightarrow{e_2} + \overrightarrow{e_3}$$

e

$$T(\overrightarrow{e_3}) = 3\overrightarrow{e_2} - \overrightarrow{e_1} + \overrightarrow{e_3}.$$

Seja A a matriz da transformação T relativamente à base canónica $\{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3}\}$ de $\mathbb{R}^3$.

(a) *(0.5 val./ 0.75 val.)* Usando apenas a informação acima, determine a matriz A.

(b) *(0.5 val./ 1 val.)* Mostre que, para qualquer $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, se tem

$$T(x, y, z) = (y - 2x - z, x + 2y + 3z, y + z).$$

(c) *(0.5 val./ 1 val.)* Averigúe se a transformação T é invertível e justifique se é verdadeira ou falsa a afirmação:

"A dimensão do núcleo da transformação T é zero."

5. **(Exame/Freq.)** Seja

$$B = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a matriz de uma transformação linear S de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^3$ relativamente a uma base $\mathcal{B}$.

(a) *(1.5 val./ 3 val.)* Calcule os valores próprios e os vectores próprios da transformação S.

(b) *(0.5 val./ 1 val.)* Indique, justificando, qual a dimensão de cada um dos subespaços próprios da transformação S.

(c) *(1 val./ 1.5 val.)* Justifique que existe uma matriz diagonal D e uma matriz regular P tais que

$$D = P^{-1} \cdot B \cdot P,$$

e determine essas matrizes (D e P).

(d) *(0.5 val./ 0.75 val.)* Indique a base $\mathcal{B}'$ de vectores de $\mathbb{R}^3$ relativamente à qual D é a matriz da transformação S.

6. **(Exame/Freq.)** Considere a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 - y^2}{2x^2 + y^2} & \text{se } (x,y) \neq (0,0) \\ \\ \dfrac{1}{2} & \text{se } (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

(a) *(0.75 val./ 1.25 val.)* Estude a continuidade da função f.

(b) *(0.75 val./ 1.5 val.)* Calcule o valor das derivadas parciais de primeira ordem $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$.

(c) *(0.75 val./ 1.25 val.) A função f* é diferenciável no ponto $(0,0)$? Justifique a sua resposta.

7. **(Exame/Freq.)** Seja $Z(x,y) = xy + xh\left(\frac{y}{x}\right)$ em que h uma função diferenciável no seu domínio.

   (a) *(1 val./ 1.75 val.)* Mostre que Z satisfaz a equação

$$x\frac{\partial Z}{\partial x} + y\frac{\partial Z}{\partial y} = xy + Z.$$

(b) *(1 val./ 1.75 val.)* Sabendo que $h''\left(-\frac{1}{2}\right) = 8$, determine o valor da derivada $\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}$ no ponto $(4, -2)$.

(c) *(0.75 val./ 1.5 val.)* Averigúe se $Z\,(x, y)$ é uma função homogénea.

8. **(Só Freq.)** Considere a função

$$g(x, y) = \cos(2xy) + \ln x.$$

(a) *(— / 0.75 val.)* Calcule a derivada direccional da função g no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ na direcção do vector $\overrightarrow{u} = (2, 3)$.

(b) *(— / 1.25 val.)* Calcule a derivada dirigida da função g no ponto $\left(1, \frac{\pi}{2}\right)$ na direcção em que é máxima.

FOLHA DE RASCUNHO (atenção: mantenha esta folha **agrafada** às anteriores)