ISCTE IUL

Instituto Universitário de Lisboa

Lisbon University Institute

Matemática

Licenciaturas em Gestão, Gestão de Marketing, GEI, Economia, Finanças e Contabilidade

2ª Frequência / 1º Exame – ano lectivo 2009-2010
11 de Janeiro de 2010

Frequência: 1 h 15 m + 30 m (Tolerância)
Exame: 2 h + 30 m (Tolerância)   Cotação:__________

Nome:____
Nº:___________

Turma:__________________________   Exame / Fequência   (Riscar o que não se aplica. Caso não assinale considera-se prova de Exame.)

1) A prova deve ser resolvida obrigatoriamente na folha do enunciado.
2) As folhas devem permanecer agrafadas.
3) Não são esclarecidas quaisquer tipo de dúvidas durante a prova.
4) Não é permitido o uso de formulário nem de calculadora.
5) Não são permitidas folhas de rascunho. As últimas páginas da prova servem para esse efeito.
6) O aluno só poderá desistir após os primeiros 30 minutos, devendo nesse caso entregar o enunciado da prova.
7) As provas em avaliação contínua (Frequência) devem ser entregues até ao tempo limite (1h45m), caso contrário serão avaliadas como Exame deixando o aluno de estar em avaliação continua.
8) Cotação das perguntas de 1 a 6: (Exame/Frequência). Os alunos em exame devem responder às perguntas de 1 a 10.
9) O aluno pode usar as páginas de rascunho para responder às perguntas da prova, desde que devidamente assinaladas.

1. Considere a seguinte função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^\alpha y}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

(a) Fazendo $\alpha = 0$, mostre que f não é continua em $(0,0)$. (0.5/1.25)

(b) Para $\alpha = 2$ mostre que f é diferenciável em $(0,0)$. (1.0/2.0)

(c) O que pode concluir quanto à continuidade de f em $(0,0)$ para $\alpha = 2$? Justifique. (0.5/0.75)

2. Seja $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, diferenciável, e seja $f(x,y) = xy\varphi(\frac{x}{y})$.

   (a) Mostre que f é homogénea e determine o respectivo grau. (0.75/1.25)

   (b) Usando a derivada da função composta verifique a identidade de Euler. (1.25/2.25)

3. Considere a função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, dada por $f(x, y) = xy + \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

(a) Mostre que $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-1, -1) = 0$, para qualquer vector $\overrightarrow{u}$ da forma $\overrightarrow{u} = (a, -a)$. (0.75/1.5)

(b) Determine a matriz Hessiana $H(x, y)$ de f. (0.75/1.25)

(c) Determine a expressão $Q(x, y)$ da forma quadrática associada à matriz Hessiana $H(1, 1)$. (0.75/0.75)

(d) Classifique a forma quadrática da alínea anterior. (0.75/1.0)

4. Seja $f(x, y) = e^x y^3$.

   (a) Determine $df(0, 2)$. (0.5/1.0)

   (b) Determine um valor aproximado de $e^{0,02} \times (2, 01)^3$. (1.0/1.5)

5. Seja $f(x,y) = 3\sqrt{1+x^2y}$.

(a) Determine $\overrightarrow{u}$ de modo que $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-2,2)$ seja máximo. (0.75/1.25)

(b) Qual o valor máximo de $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(-2,2)$? (0.75/1.25)

6. Seja $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

(a) Determine a matriz P e a matriz diagonal D tais que $D = P^{-1}AP$. (1.5/2.5)

.

(b) Qual a relação entre $|D|$ e $|A|$? Justifique. (0.5/0.5)

As próximas perguntas destinam-se únicamente aos alunos avaliados em Exame.

7. Considere o seguinte sistema de equações lineares em x, y, z, t

$$\begin{cases} y + 2z + t - a = 0 \\ ax + z + t - b = 0 \\ x + y + z - a = 0 \end{cases} \quad , \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

(a) Escreva o sistema na forma matricial. (0.5)

(b) Usando o método de Gauss, classifique o sistema em função dos parâmetros a, b. (1.25)

(c) Resolva o sistema pela regra de Cramer para $a = -2$ e $b = 0$. (1.25)

8. Tenha em conta a seguinte igualdade matricial

$$A^{-1}\widehat{B} = |B|I + |B|A^{-1}X^{\top}.$$

(a) Explicite a matriz X em função das matrizes A e B. (0.75)

(b) Sendo $B = \begin{bmatrix} 1 & a & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & a & 1 \end{bmatrix}$, diga para que valores de $a \in \mathbb{R}$ se tem $B\widehat{B} = I$ sem calcular a matriz $\widehat{B}$. (0.75)

(c) Supondo $a = 0$ e usando as propriedades dos determinantes calcule $|A^{-1}|$, sabendo que $A = 8B$. (**Observação:** Não necessita inverter a matriz a matriz B.) (0.5)

9. Seja $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma transformação linear definida por $T(x, y) = (x - y, x + y)$.

(a) Determine a matriz A de T relativamente à base canónica. (0.5)

(b) Diga, justificando, se T é invertível. Em caso afirmativo, determine $T^{-1}(-1, 3)$. (0.75)

(c) Determine a matriz B de T relativamente à base $\mathcal{B} = \{(1,1),(1,0)\}$. (0.75)

10. Diga, justificando, se:

    (a) $U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0, y \geq 0\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$; (0.5)

    (b) $V = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\}$ é subespaço vectorial de $\mathbb{R}^2$. (0.5)

Folha de Rascunho

Folha de Rascunho

Folha de Rascunho