1 ESPAÇOS VECTORIAIS

1.1 Espaço Vectorial

Seja E um conjunto de elementos $E = \{e, f, g, ..., u, v, ...\}$ que chamaremos vectores, e $\Bbbk$ um corpo[1], $\Bbbk = \{\alpha, \beta, ..., \lambda, \mu, ...\}$, cujos elementos $\alpha, \beta, ..., \lambda, \mu, ..,$

designaremos por escalares.

E constitui um Espaço Vectorial ou Espaço Linear, definido sobre o corpo $\Bbbk$, quando se supõe definida uma adição de elementos de E e uma multiplicação de elementos de E por elementos de$\Bbbk$, que verificam as seguintes propriedades:

1.1.1 Está definida em E uma operação binária (interna), chamada adição de vectores $(+ : E^2 \longrightarrow E)$ gozando das seguintes propriedades:

a) Fecho ou Determinação $\forall\ f, g \in E\ \ f + g \in E$

b) Associatividade $f + (g + h) = (f + g) + h;\ \forall\ f, g, h \in E$

c) Comutatividade $f + g = g + f;\ \forall\ f, g, h \in E$

d) Elemento Neutro Existe um (apenas um) elemento de E (0: vector nulo) tal que $f + 0 = 0 + f = f;\ \ \forall\ f \in E$

[1] $(E, +, \cdot)$ é um corpo sse:

1) E é um grupo comutativo relativamente à adição
2) E é um grupo comutativo relativamente à multiplicação (excluindo $\emptyset$)
3) A multiplicação é distributiva à direita e à esquerda relativamente à adição

e) Elemento Simétrico (ou todo o elemento de E é regular) $\forall\, f \in E$

$\exists(-f) \in E : f + (-f) = (-f) + f) = 0$

1.1.2 Está definida uma operação de multiplicação de elementos de $\Bbbk$ por elementos de E ($\Bbbk \times E \to E$), ou seja o produto de um vector por um escalar é ainda um vector.

A multiplicação escalar goza das seguintes propriedades:

a) Fecho ou Determinação $\forall\lambda \in \Bbbk\ \wedge\ f \in E \quad \lambda \times f \in E$

b) Distributividade da multiplicação em relação à adição definida em $E \quad \forall\lambda \in \Bbbk\ \wedge\ f, g \in E \qquad \lambda(f + g) = \lambda f + \lambda g$

c) Distributividade da multiplicação em relação à adição definida em $\Bbbk \quad \forall\lambda, \mu \in \Bbbk\ \wedge\ f \in E \quad (\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$

d) Associatividade: $\forall\lambda, \mu \in \Bbbk \wedge\ f \in E \quad \lambda(\mu \times f) = (\lambda \times \mu) \times f$

e)Elemento Neutro $\exists\ 1 \in \Bbbk\ \ \forall f \in E\ \ 1 \times f = f \times 1 = f$

1.1.3 Exemplos de Espaços Vectoriais

Um exemplo de Espaço Vectorial sobre o corpo dos números reais é o de todas as sequências ordenadas de números reais $\Re^n$, de n elementos: $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n)$.

Os escalares são números reais e os vectores serão da forma:$(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n)$,sendo $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n$ números reais.

Temos de verificar as propriedades de um espaço vectorial.

Definir-se-á a adição entre sequências de n n úmeros reais do seguinte modo: $(a_1, a_2, a_3, a_4, ...a_n) + (b_1, b_2, b_3, b_4, ...b_n) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3, ...a_n + b_n)$.

Definir-se-á um produto de um escalar (número real) por um vector (sequência ordenada de nnúmeros reais) $\lambda(a_1, a_2, ...a_n) = (a_1\lambda, a_2\lambda, ..., a_n\lambda)$

Facilmente se verifica que estas operações gozam das propriedades indicadas atrás