

Forma algébrica:

São polinómios inteiros, ou seja em que o grau de cada monómio é inteiro, e homogéneos, ou seja em que todos os monómios têm o mesmo grau, em n variáveis de grau m .

Forma quadrática em notação matricial:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = X^T A X, \text{ em que } X^T = [x_1 \ x_2 \ \dots \ x_n]$$

Para que se possa efectuar o estudo da for quadrática, convém dar à matriz A uma forma simétrica, ou seja de modo que $A = A^T$.

Exemplo:

$$f(x,y) = 2x^2 - xy + 3yx + 4y^2$$

Representações possíveis:

1. $X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
2. $X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$
3. $X^T A X = \begin{bmatrix} x_1 & x_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$

Destas representações, a que nos convém é a 3.

Classificação das formas quadráticas:

1. Definida positiva: $X^T A X > 0, \forall X \neq 0$
2. Definida negativa: $X^T A X < 0, \forall X \neq 0$
3. Semi Definida positiva: $X^T A X \geq 0, \forall X \neq 0$
4. Semi Definida negativa: $X^T A X \leq 0, \forall X \neq 0$
5. Indefinida: $X^T A X \geq, \leq 0, \forall X \neq 0$

Classificação duma forma quadrática através dos valores próprios:

1. Definida positiva : $\lambda_i > 0, i=1, \dots, n$
2. Definida negativa : $\lambda_i < 0, i=1, \dots, n$
3. Semi Definida positiva : $\lambda_i > 0, i=1, \dots, r$ e $\lambda_i = 0, i=r+1, \dots, n$
4. Semi Definida negativa : $\lambda_i < 0, i=1, \dots, r$ e $\lambda_i = 0, i=r+1, \dots, n$
5. Indefinida: existem pelo menos dois valores próprios com sinal contrário

Nota: r designa a característica da matriz A .

Classificação duma forma quadrática através do sinal dos menores principais:

Seja A a matriz da forma quadrática.

1. formas quadráticas de 2 variáveis:

$$D_1 = |a_{11}| \text{ e } D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

$D_1 > 0$	$D_2 > 0$	Definida positiva
	$D_2 = 0$	Semi definida positiva
	$D_2 < 0$	Indefinida
$D_1 < 0$	$D_2 > 0$	Definida negativa
	$D_2 = 0$	Semi definida negativa
	$D_2 < 0$	Indefinida

Se $D_1 = 0$, deve proceder a um reordenamento das linhas e colunas, até obter $D_1 \neq 0$

2. formas quadráticas de 3 variáveis:

$$D_1 = |a_{11}|, D_2 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \text{ e } D_3 = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$D_1 > 0, D_2 > 0$	$D_3 > 0$	Definida positiva
	$D_3 = 0$	Semi definida positiva
	$D_3 < 0$	Indefinida
$D_1 < 0, D_2 > 0$	$D_3 > 0$	Definida negativa
	$D_3 = 0$	Semi definida negativa
	$D_3 < 0$	Indefinida

Se $D_2 = 0$ ou $D_1 = 0$, deve proceder a um reordenamento das linhas e colunas, até obter $\neq 0$