Espaços vectoriais

Matemática

1º Ano

1º Semestre

2008/2009

Mafalda Johannsen

Capítulos

Características de um Espaço Vectorial

Um espaço vectorial tem de respeitar <u>todas</u> estas propriedades:

- Tem de ter origem, isto é, o nulo da dimensão onde está ($\vec{0}$);

- Tem de ser fechado para a soma. Por outras palavras, o conjunto A diz-se fechado para a soma de elementos do conjunto se e só se: $\forall$ a,b $\in$ A : a+b $\in$ A;

- Tem de ser fechado para a multiplicação por escalares, ou seja, se multiplicarmos um elemento do conjunto por outro elemento que pertença a IR, o resultado tem de fazer parte do conjunto do primeiro elemento : $\forall\ \alpha \in$ IR, b $\in A$: $\alpha * b \in$ A.

Exemplo 1.1:

IN é um espaço vectorial?

Não, dado que não tem origem ou o nulo da dimensão (0 não pertence a IN).

Exemplo 1.2:

Q é um espaço vectorial?

Tem origem (0 pertence a Q) e é fechado para a soma ($\frac{1}{2}+\frac{5}{2}$=3, 3 $\in Q$), no entanto não é fechado para a multiplicação escalar: $\frac{\pi}{2}x\frac{1}{6}=\frac{\pi}{12}$, $\frac{\pi}{12}$ não pertence a Q.

Dimensão do Espaço

A dimensão de um espaço vectorial é sempre igual ao número de vectores da base:

(x,y) – dimensão 2

(x,y,z) – dimensão 3

(x, z-x, z) – dimensão 2

Subespaço Vectorial

Um Subespaço Vectorial é um espaço mais pequeno, cujas propriedades de cima têm de ser respeitadas.

Exemplo 1.3:

IR^2 *é um subespaço de* IR^5

IR^{27} *é subespaço de* IR^{28}

Exemplo 1.4:

Diga se (x, y, 0) é subespaço de IR^3.

É fechado para a adição vectorial:

$$(x1, y1, 0) + (x2, y2, 0) = (x1+x2, y1+y2, 0)$$

É fechado para a multiplicação escalar:

$\lambda(x, y, 0) = (\lambda x, \lambda y, 0)$

Exemplo 1.5:

Diga se (1, y, z) é subespaço de IR^3.

Não é fechado para a adição vectorial, logo já não é subespaço:

$$(1, y1, z1) + (1, y2, z2) = (\underline{\mathbf{2}}, y1+y2, z1+z2)$$

Combinação Linear de Vectores

Uma combinação Linear de Vectores é algo do género:

$$\alpha\vec{u} + \beta\vec{v} = \vec{z}$$

α e β são escalares e $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{z}$ são vectores, sendo que $\vec{z}$ é o resultado da combinação.

Representação de Vectores

$$\vec{e} = (\mathrm{a}, \mathrm{b})$$

$$(\mathrm{a}, \mathrm{b}) = \mathrm{a}(1{,}0) + \mathrm{b}(0{,}1) = [(1{,}0)\ \ (0{,}1)]\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

Independência Linear

N vectores dizem-se linearmente independentes quando não for possível obter cada um deles à custa de combinações lineares feitas entre os restantes.

Matematicamente, três vectores dizem-se linearmente independentes se e só se $\lambda_1\vec{u}+\lambda_2\vec{v}+\lambda_3\vec{z}=\vec{0}$, com $\lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$.

Exemplo 2.1:

(1,1) (1,0) (3,2) só serão linearmente independentes se λ1(1,1) + λ2(1,0) + λ3(3,2)=0

$$(\lambda_1, \lambda_1) + (\lambda_2, 0) + (3\lambda_3, 2\lambda_3) = (0,0) \Leftrightarrow (\lambda 1+\lambda 2+3\lambda 3, \lambda 1+2\lambda 3) = (0,0)$$

$$\begin{cases} \lambda 1+\lambda 2+3\lambda 3=0 \\ \lambda 1+2\lambda 3=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_2-3\lambda_3 \\ -\lambda_2-3\lambda_3+2\lambda_3=0 \end{cases} \leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1=-\lambda_2-3\lambda_3 \\ -\lambda_2=\lambda_3 \end{cases}$$

Fixar uma constante: $\lambda 3=2$ *(a constante escolhida é aleatória, pode ser 2 como outro número qualquer)*

$$\begin{cases} \lambda 1=-4 \\ \lambda 2=-2 \end{cases}$$

(-4, -2, 2)

Agora substitui-se os λ *pelos valores encontrados:*

$$-4(1,1) -2(1,0) +2(3,2) = (0,0) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow (-4,-4)+(-2,0)+(6,4) = (0,0)$$

Pode-se concluir que não são linearmente independentes, pois para obter o vector nulo tivemos de utilizar $(\lambda_1,\lambda_2,\lambda_3)$ *= (-4, -2, 2) e, segundo a regra de independência linear, teríamos de ter usado (0, 0, 0).*

Em IR^n, o máximo de vectores independentes entre si é n. Portanto, em IR^{30} há no máximo 30 vectores independentes e assim sucessivamente.

Porém, esta forma de avaliar a independência linear é bastante complexa. Podemos fazê-lo de uma forma muito mais simples: determinamos a dependência linear através da condensação de matrizes, com as operações anteriormente estudadas.

Exemplo 2.2:

Estude a independência linear do seguinte conjunto de vectores: x^2-1; $2-2x^2$; $3x+1$

(Caderno de Espaços Vectoriais)

O vector x^2*-1 fica (1, 0, -1), dado que o coeficiente de* x^2 *é 1 e de x é 0.*

O vector $2-2x^2$ *fica (-2, 0, 2)*

O vector 3x+1 fica (0, 3, 1)

Portanto, em matriz fica: $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

Depois de condensada, podemos concluir que não há independência linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para que se possa tirar uma conclusão quanto à dependência ou independência dos vetores temos de aplicar a regra da condensação. Se a matriz ficar "em escada de linha" então os vetores serão linearmente independentes, caso contrário são linearmente dependentes

Exemplo 2.3:

Verifique se os vectores (5, 0, 0), (3,2,0) e (4,3,1) são linearmente independentes.

$$\begin{bmatrix} 5 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

São linearmente independentes. Não é necessário operar a condensação, na medida em que já está feita.

Transformações Lineares

As transformações lineares têm de possuir as seguintes propriedades:

- Linear para a soma: Sendo os vectores (x, y) dois quaisquer vectores, teremos de verificar que T(x+y) = T(x) + T(y);

-Linear para a multiplicação: T(αx) = αT(x).

Uma transformação linear pode ser sempre representada pelo produto de uma matriz pelo vector que queremos transformar, isto é, T(x) = Ax, em que x é um vector.

Exemplo 3.1:

A transformação linear T de IR^3 em IR^2 definida por T(x, y, z) = (x, x+y+z) é linear.

A transformação T de IR^3 em IR^2 definida por T(x, y, z) = (x, z+4) não é linear.

Exemplo 3.2:

Mostre que a transformação T de IR^3 em IR^3 definida por T(x, y, z) = (x, y, y+z) é linear.

Neste exercício, temos de provar que a transformação é, de facto, linear. Como tal, é necessário "montar" e "desmontar" a transformação. Vejamos:

A propriedade é $T(\alpha\vec{u}+\beta\vec{v}) = \alpha T(\vec{u}) + \beta T(\vec{v})$ (isto é, provar que é linear para a soma e para a multiplicação)

1º Passo - Arranjar quaisquer x ,y, z e colocar os α fora das coordenadas, mas dentro da transformação:

$T(\alpha 1(x1, y1, z1) + \alpha 2(x2, y2, z2)) =$

2º Passo – Juntar os α às coordenadas e somar os x's, os y's e os z's:

$= T(\alpha 1x1 + \alpha 2x2, \alpha 1y1 + \alpha 2y2, \alpha 1z1 + \alpha 2z2) =$

3º Passo – Substituir os x, y, z pelos do enunciado (isto é, x, y, y+z) e retirar o T:

$= (\alpha 1x1 + \alpha 2x2, \alpha 1y1 + \alpha 2y2, \alpha 1(y1+z1) + \alpha 2(y2+z2) =$

4º Passo – Separam-se as coordenadas, ficando todas as que sejam $\alpha 1$ juntas e todas as que sejam $\alpha 2$ juntas também:

$= (\alpha 1x1, \alpha 1y1, \alpha 1(y1+z1)) + (\alpha 2x2, \alpha 2y2, \alpha 2(y2+z2)) =$

5º Passo – Pôr os α em evidência:

$= \alpha 1(x1, y1, y1 + z1) + \alpha 2(x2, y2, y2 + z2) =$

6º Passo – Voltar à situação inicial, daí o T também aparecer novamente:

$= \alpha 1T(x1, y1, z1) + \alpha 2T(x2, y2, z2)$

Recapitulando: $T(\alpha 1(x1, y1, z1) + \alpha 2(x2, y2, z2)) =$

$= T(\alpha 1x1 + \alpha 2x2, \alpha 1y1 + \alpha 2y2, \alpha 1z1 + \alpha 2z2) =$

$= (\alpha 1x1 + \alpha 2x2, \alpha 1y1 + \alpha 2y2, \alpha 1(y1+z1) + \alpha 2(y2+z2) =$

$= (\alpha 1x1, \alpha 1y1, \alpha 1(y1+z1)) + (\alpha 2x2, \alpha 2y2, \alpha 2(y2+z2)) =$

$= \alpha 1(x1, y1, y1 + z1) + \alpha 2(x2, y2, y2 + z2) =$

$= \alpha 1T(x1, y1, z1) + \alpha 2T(x2, y2, z2)$

Outros conceitos indissociáveis desta matéria são o núcleo da transformação e o contradomínio ou imagem da mesma.

Considere-se a transformação Linear T de E em F. Chama-se núcleo de T ao conjunto de vectores de E que são transformados por T no vector nulo. A dimensão deste, também denominada "nulidade", é a subtracção da dimensão do espaço de partida (neste caso, E) pela dimensão do contradomínio. A dimensão do contradomínio, por sua vez, é a característica (o "r") da matriz.

Por último, será relevante estudar a <u>invertibilidade</u> de uma transformação linear, isto é, analisar se esta é ou não invertível. Tal como acontece com qualquer função, a transformação linear é invertível apenas se for injectiva.

Base de um Espaço Vectorial

Um conjunto de vectores ou elementos diz-se base de um espaço vectorial, se e só se for formado por vectores linearmente independentes e ainda gerar todo o espaço. Para gerar todo o espaço, a base tem de ter um número de vectores igual ao cardinal da dimensão do espaço, por exemplo: em IR^2 (8, 4) e (1, 9) geram todo o espaço, visto que são dois vectores a gerar uma dimensão 2. Se, em vez de existirem os vectores (8, 4) e (1, 9), apenas houvesse o (8, 4), este já não geraria todo o espaço, na medida em que é um vector e a dimensão é 2. Portanto pode-se concluir que em IR^n há, no máximo, *n* vectores linearmente independentes que geram todo o espaço.

Exemplo 4.1:

Verifique se os seguintes vectores são linearmente independentes em IR^2: (1, 3); (2, 5); (0, 1).

Num espaço vectorial de dimensão 2, 3 vectores são sempre linearmente dependentes.

Exemplo 4.2:

Diga se os vectores (1, 4, 5) e (0, 1, 2) podem constituir uma base do espaço respectivo.

Neste caso, o espaço respectivo é IR^3, dado que cada vector é composto por três coordenadas, logo a dimensão do espaço é 3. Como tal, dois vectores nunca geram um espaço de dimensão 3, assim sendo, não formam uma base.

Exemplo 4.3:

Conclua se os vectores (3, 1); (3, 1) e (2, 1) podem constituir uma base em IR^2.

Num espaço vectorial de dimensão 2, três vectores são sempre linearmente dependentes, não podendo, deste modo, formar uma base.

Atenção!: Quando nos é dado um vector e não se menciona a base em que ele vem expresso, é porque se está a considerar a base canónica. Base canónica de IR^2: (1,0); (0,1). Base Canónica de IR^3: (1,0,0); (0,1,0); (0,0,1).

Resumindo:

Espaço de Dimensão N	Sistema de Geradores	Dependência	Base
N-1 vectores	Não	Dependente/Independente	Não
N vectores	Sim	Dependente/Independente	Não/Sim
N+1 vectores	Sim	Dependente	Não

Mudança de Base

Existem três situações de mudança de base que podem ocorrer:

1º) Quando se deseja passar de uma base qualquer A para outra qualquer B;

2º) Quando se deseja passar da base canónica para uma base qualquer B;

3º) E quando se deseja passar de uma qualquer base B para a base canónica.

1º) Matriz que transforma coordenadas de uma base qualquer A para uma base qualquer B:

$$B^{-1} A B$$

2º) Matriz que transforma coordenadas de uma base canónica para uma base qualquer B:

$$B^{-1}$$

3º) Matriz que transforma coordenadas de uma base qualquer B para a base canónica:

$$B$$

Exemplo 5.1:

Considere a base $V = \{\boldsymbol{v1}, \boldsymbol{v2}, \boldsymbol{v3}\}$ *de* $\boldsymbol{IR^3}$ *formada pelos vectores v1 = (2, -1, 3), v2 = (-1, 1, 1), v3 = (3, -1, 6).* ***(Frequência de 29 de Janeiro de 2007)***

Este é o 2º caso de mudança de base, portanto opera-se a inversa da matriz

$$\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 6 \end{bmatrix}^{-1}$$

Exemplo 5.2:

Numa transformação T de IR^2 *tem na base* $\{\overrightarrow{e1}, \overrightarrow{e2}\}$ *a matriz A=*$\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$

Determine a matriz da transformação na base $\{\overrightarrow{e3}, \overrightarrow{e4}\}$ *onde* $\overrightarrow{e3} = \overrightarrow{e3} + 2\overrightarrow{e4}$

$\overrightarrow{e4} = 2\overrightarrow{e3} + 2\overrightarrow{e4}$.

Este é, nitidamente, o 1º caso. Portanto, é necessário saber qual é a matriz A e qual a B. A matriz A corresponde à base "velha", neste caso, é a matriz $\begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix}$*. A matriz B será então a base "nova", ou seja,*$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ *(são os coeficientes de* $\overrightarrow{e3}$ *e* $\overrightarrow{e4}$*).*

Logo fica: $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 6 & -2 \\ 6 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

Determinar Coordenadas de um Vector em Diferentes Bases

1º Caso:

Sabem-se as coordenadas na base “nova” e querem-se na base “velha”

Matriz mudanca de base

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Coordenadas da base “velha”

Coordenadas da base “nova”

2º Caso:

Sabem-se as coordenadas na base “velha” e querem-se na base “nova”

Matriz mudanca de base

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Coordenadas na base “nova”

Coordenadas na base “velha”

Exemplo 6.1:

Dado o vector (1, 2, 1) na base canónica, escreva-o na base constituída pelos vectores (5, 0, 0); (3, 2, 0); (1, 2, 3).

Este é o 2º Caso, dado que se sabem as coordenadas na base "velha" e pedem para as descobrirmos na base "nova".

A base "velha" é a canónica e a matriz $\begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ *é a matriz mudança de base.*

Logo, fica: $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$

Exemplo 6.2:

Sabe-se que a base A é constituída pelos vectores (1, 4, 5); (2, 3, 9); (2, 2, 7). Quais as coordenadas do vector (0, 0, 7) na base canónica?

Este já é o 1º caso, portanto:

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 2 \\ 5 & 9 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 7 \end{bmatrix}$$

Valores e Vectores Próprios

Um vector diz-se próprio relativamente a uma transformação linear se e só se:

$$T(x) = ax = \lambda x$$

("a" é uma matriz)

$$ax = \lambda x \Leftrightarrow ax - \lambda x = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda)x = 0 \Leftrightarrow (a-\lambda I) = 0$$

Ao conjunto dos valores admissíveis para λ chamamos valores próprios associados aos vectores próprios da equação.

Para tornar esta parte mais perceptível vejamos o seguinte exemplo:

Exemplo 7.1:

Seja a matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$

(Caderno de Espaços Vectoriais)

Determine os valores próprios de A e os correspondentes vectores próprios.

Para começar, transforma-se a matriz num determinante, subtraem-se os λ aos valores da diagonal principal e iguala-se a zero:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

Em seguida, utiliza-se a regra do determinante e descobrem-se os valores próprios:

(1-λ) (3-λ) – (4x2) = 0 ⇔ 3 – λ - 3λ + λ^2- 8 = 0 ⇔ λ^2- 4λ – 5 = 0 ⇔
$\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16-4x1x(-5)}}{2x1}$ ⇔ $\lambda = \frac{4 \pm \sqrt{16+20}}{2}$ ⇔ $\lambda = 1 \vee \lambda = 5$

1 e 5 são os <u>valores próprios</u> e com eles encontram-se os respectivos vectores próprios, substituindo os λ por 1 e 5, ampliando a matriz, condensando-a e fazendo um sistema:

λ = 1:

$$\begin{bmatrix} 1-1 & 4 \\ 2 & 3-1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ 2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 4| & 0 \\ 2 & 2| & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2| & 0 \\ 0 & 4| & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x+2y=0 \\ 4y=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=0 \\ y=0 \end{cases}$$

O <u>vector próprio</u> associado ao valor próprio 1, é: (0, 0) ou, escrito de outra forma: x (1, 0)

λ = 5:

$$\begin{bmatrix} 1-5 & 4 \\ 2 & 3-5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2| & 0 \\ -4 & 4| & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -2| & 0 \\ 0 & 0| & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{cases} 2x-2y=0 \\ 0=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=y \\ 0=0 \end{cases}$$

O vector próprio associado ao valor próprio 5, é: x (1, 0)

Diagonalização de uma Matriz

Em primeiro lugar, será necessário relembrar o conceito de matriz diagonal. Entende-se por matriz diagonal, a matriz que tiver todos os elementos iguais a zero, excepto os da diagonal principal (que podem ter qualquer valor, incluindo zero).

Matriz diagonal 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix} \text{ a, b, c} \in \text{IR}$$

Para se diagonalizar uma matriz tem que se seguir os seguintes passos:

1º Passo: Descobrir os valores próprios da matriz dada;

2º Passo: Descobrir os vectores próprios associados a cada valor próprio;

3º Passo: A matriz só será diagonizável se a multiplicidade algébrica for igual à multiplicidade geométrica;

4º Passo: A matriz que se obtém será, então, uma matriz diagonal, cuja diagonal principal contém os valores próprios da matriz inicial.

Multiplicidade Algébrica: Número de vezes em que um valor próprio é solução do polinómio característico.

Multiplicidade Geométrica: é o cardinal da base de vectores próprios associados a um valor próprio.

Já se sabe de antemão que a matriz diagonal é formada pelos valores próprios, no entanto, ainda não foi explicado como é que se lá chega. Para se chegar à matriz diagonal, aquilo que se faz à matriz inicial é: D = P^{-1}AP, onde D é a matriz diagonal, A a matriz inicial e P a matriz que tem como colunas os vectores próprios da matriz.

Exemplo 8.1:

Seja P2 o espaço dos polinómios de grau ≤ 2 e considere-se a base $\{1, x, x^2 + 1\}$*. Seja T a transformação em P2 definida por* $T[p(x)] = p'(x)$*. A representação de T, na base fixada é feita pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

(Caderno de Espaços Vectoriais)

Determine os valores próprios, os vectores próprios e diga se a transformação dada pode ser representada por uma matriz diagonal. Justifique.

$$\begin{vmatrix} 0-\lambda & 1 & 0 \\ 0 & 0-\lambda & 2 \\ 0 & 0 & 0-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow -\lambda^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 0$$

$\lambda = 0$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ 2z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 0 \\ z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

O vector próprio associado ao valor próprio zero, será um vector do tipo (x, 0, 0) = x(1, 0, 0)

A multiplicidade algébrica é 3, dado que o λ é 3 vezes solução, isto é, é 3 vezes um valor próprio. A multiplicidade geométrica é 1, dado que há um vector próprio, o (x, 0, 0). Portanto, a <u>matriz não é diagonizável</u>, visto que 1 ≠ 3.

Exemplo 8.2:

Considere a transformação de IR^3 *em* IR^3*, representada em certa base pela matriz*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

(Caderno de Espaços Vectoriais)

Determine os valores próprios e os vectores próprios associados. Determine a matriz diagonal que representa a transformação dada, embora numa outra base. Diga qual é essa base.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 2 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1 \vee \lambda = 1 \vee \lambda = 3$$

$\lambda = 1$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} y = -2z \\ y = -2z \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(x, -2z, z) = x(1, 0, 0) + z(0, -2, 1)

A multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 2, visto que tem <u>dois</u> vectores associados.

A multiplicidade geométrica de $\lambda = 1$ é 2, dado que é duas vezes solução.

Logo, a multiplicidade geométrica é igual à algébrica.

No entanto, ainda não se pode afirmar que a matriz é diagonizável, na medida em que é necessário fazer os mesmos cálculos para $\lambda = 3$. Só se a multiplicidade algébrica e geométrica de $\lambda = 3$ forem iguais é que se pode diagonalizar.

$\lambda = 3$:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -2 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right] \Leftrightarrow \begin{cases} 2x + y + 2z = 0 \\ -2y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} z = x \\ y = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

(z, 0, z) = z(1, 0, 1)

A multiplicidade geométrica é 1 e a algébrica também, logo a matriz é diagonizável.

Assim, a matriz diagonal será:

$$D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

(P tem como colunas os vectores próprios, logo esta é a base pedida no enunciado)

Segundo a fórmula:

$$\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}^{-1}\begin{bmatrix}1 & 1 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 1 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0 & 1\\0 & -2 & 0\\0 & 1 & 1\end{bmatrix}$$

Formas Quadráticas

Uma forma quadrática é uma expressão que apenas apresenta termos de grau 2, por exemplo: $x^2 + 2yx + 4y^2$.

Uma forma quadrática pode ser sempre representada na seguinte forma:

$$\begin{bmatrix}x & y & \dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}a & \dots\\b & \dots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\\\dots\end{bmatrix}$$

Pegando no exemplo $x^2 + 2yx + 4y^2$, este pode ser representado assim:

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & \mathbf{1}\\\mathbf{1} & 4\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Os 1's a negrito correspondem ao 2xy, ou seja, é obrigatório dividir por 2 sempre que o coeficiente corresponda a duas incógnitas.

Exemplo 9.1:

Seja a forma quadrática Q(xy) = $3x^2 + 6xy + y^2$. Represente-a na forma matricial.

$$\begin{bmatrix}x & y\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & 3\\3 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$$

Exemplo 9.2:

Seja a forma quadrática Q(xy) = $2x^2 + 5xy + 2y^2$. Represente-a na forma matricial.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2} & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

Se a forma quadrática, em vez de ter duas variáveis (x, y), tiver três (x, y, z) fica:

$$\begin{bmatrix} x^2 & xy & xz \\ xy & y^2 & yz \\ zx & zy & z^2 \end{bmatrix}$$

Exemplo 9.3:

Seja a forma quadrática Q(xyz) = $x^2 + 5y^2 - 2z^2 + 8xy - 2yz + 4xz$*. Represente-a na forma matricial.*

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 4 & 5 & -1 \\ 2 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Estudo do Sinal da Forma Quadrática

O sinal das formas quadráticas pode ser estudado através de dois métodos:

- Pelos Valores Próprios;

- Pelos Determinantes e Menores Principais.

Pelos Valores Próprios

Tal como diz o título, estudar o sinal através dos valores próprios é descobri-los e analisar-lhes os sinais.

Se $\lambda_1 > 0$ e $\lambda_2 > 0$, então a forma quadrática é definida positiva.

Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 < 0$, a forma quadrática é definida negativa.

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 < 0$ (ou vice-versa), a forma quadrática é semi-definida negativa.

Se $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 > 0$ (ou vice-versa), a forma quadrática é semi-definida positiva.

Se $\lambda_1 < 0$ e $\lambda_2 > 0$ (ou vice-versa), a forma quadrática é indefinida.

Exemplo 9.4:

Estude o sinal da seguinte forma quadrática: $Q(x, y) = -2x^2 - 3y^2 + 4xy$.

$$\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$\begin{vmatrix} -2-\lambda & 2 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-2-\lambda)(-3-\lambda) - 4 = 0 \Leftrightarrow 6 + 2\lambda + 3\lambda + \lambda^2 - 4 = 0 \Leftrightarrow \lambda^2 + 6\lambda + 2 = 0 \Leftrightarrow \lambda = -5{,}6 \vee \lambda = -0{,}355$

A forma quadrática é definida negativa, dado que os dois valores próprios são negativos.

Pelos Determinantes e Menores Principais

Seja $\begin{bmatrix} x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ uma forma quadrática na forma matricial

Para descobrir se é definida positiva ou definida negativa, calcula-se o determinante da primeira linha e primeira coluna (D1 que neste caso é 2) e o da segunda linha e segunda coluna (D2): $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}$ = -7

Se $D1 > 0 \wedge D2 > 0$, a forma quadrática é definida positiva

Se $D1 < 0 \wedge D2 > 0$, a forma quadrática é definida negativa

Neste exemplo, a forma quadrática é indefinida, mas vamos analisar como se ainda não soubéssemos, visto que ainda faltam as semi-definidas negativas e positivas:

Para descobrir se é semi-definida positiva/negativa, calcula-se os menores principais de 1ª(Mp1 e Mp2) e 2ª(MP) ordem, exemplificando:

Estes são os menores principais de 1ª ordem.

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$$

Este é o menor principal de 2ª ordem, "corta-se linhas e colunas imaginárias" e calcula-se o determinante. Claro que se fosse uma matriz 3x3 só as linhas e colunas de 3ªordem é que seriam imaginárias e assim sucessivamente.

Se $Mp1 \geq 0 \wedge Mp2 \geq 0 \wedge MP \geq 0$, a forma quadrática é semi-definida Positiva

Se $Mp1 \leq 0 \wedge Mp2 \geq 0 \wedge MP \geq 0$, a forma quadrática é semi-definida Negativa