Derivada direccional e gradiente[1]

Definição 1: Considere uma função $f:\ D_f \subset \Re^2 \to \Re^2, D_f$ um conjunto aberto e um ponto $(a,b) \in D_f$. Seja ainda *f* diferenciável em (a,b) e $\vec{u} = (u_1, u_2)$, um vector unitário ($\|\vec{u}\| = 1$). Define-se derivada direccional de *f* em (a,b) e denotada por $f'_{\vec{u}}$:

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = f'_x(a,b)u_1 + f'_y(a,b)u_2$$

A derivada direccional $f'_{\vec{u}}$ mede a taxa de variação de *f* ao longo do vector $\vec{u}$.

Exemplo 1: Considere $f(x,y) = x^2 + y^2$ e o vector $\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{i} + \frac{1}{\sqrt{2}}\vec{j}$. Calcule $f'_{\vec{u}}(1,0)$.

Como é óbvio, $f'_x(x,y) = 2x$ e $f'_y(x,y) = 2y$. Assim,

$$f'_{\vec{u}}(1,0) = f'_x(1,0) + f'_y(1,0) = 2 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + 0 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

Definição 2: Chama-se gradiente de f em (a,b) e representa-se por grad $f(a,b)$ ou $\nabla f(a,b)$ ao vector das suas derivadas parciais em (a,b),

$$\text{grad } f(a,b) = f'_x(a,b)\vec{i} + f'_y(a,b)\vec{j}$$

Exemplo 2: Escreva o gradiente de $f(x,y) = x + e^y$ no ponto (1,1)

Usando a definição 2: grad $f(a,b) = f'_x(a,b)\vec{i} + f'_y(a,b)\vec{j}$
Assim,

$$\text{grad } f(1,1) = \vec{i} + e\vec{j}.$$

Taxa de variação da função *f* ao longo de $\vec{u}$

Como se pode perceber facilmente, a derivada direccional pode ser dada como produto interno[2] do gradiente de *f* com o vector $\vec{u}$:

$$f'_{\vec{u}}(a,b) = \text{grad } f(a,b) \cdot \vec{u} = f'_x(a,b)u_1 + f'_y(a,b)u_2$$

---

[1] Para facilitar a compreensão deste tópico, restringimo-nos neste texto ao tratamento de funções em $\Re^2$. Obviamente, todas as conclusões são extensivas a funções em $\Re^n$.

[2] Veja-se nota seguinte.

Este facto é muito importante porque nos permite compreender quando é que a taxa de variação da função é máxima, mínima ou nula.

Retomando a definição anterior $f'_{\vec{u}} = \text{grad}\, f \cdot \vec{u}$, e recordando a definição do produto interno, tem-se

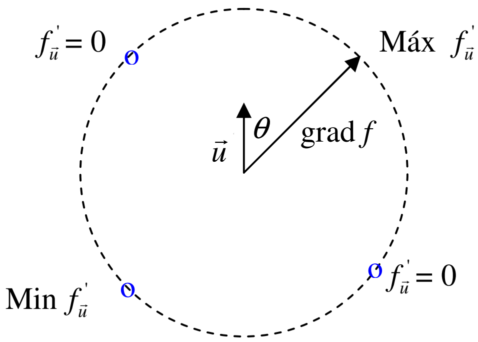
$$f'_{\vec{u}} = \text{grad}\, f \cdot \vec{u} = \|\text{grad} f\| \, \|\vec{u}\| \, \cos\theta$$

E, como $\|\vec{u}\| = 1$, então

$$f'_{\vec{u}} = \text{grad}\, f \cdot \vec{u} = \|\text{grad} f\| \, \cos\theta$$

Admitamos agora que grad f é fixo e apenas $\vec{u}$ pode variar (*ver* Figura 1). O valor máximo de $f'_{\vec{u}}$ ocorre quando $\cos\theta = 1$, ou seja $\theta = 0$ e $\vec{u}$ aponta na direcção do grad f. O valor mínimo de $f'_{\vec{u}}$ ocorre quando $\cos\theta = -1$, portanto $\theta = \pi$. Quando $\theta = \dfrac{\pi}{2}$ ou $\theta = \dfrac{3\pi}{2}$, tem-se $\cos\theta = 0$.

Figura 1



Produto Interno ou Produto Escalar [3]

Dados dois vectores quaisquer em $\Re^2$ $\vec{u} = u_1\vec{i} + u_2\vec{j}$ e $\vec{v} = v_1\vec{i} + v_2\vec{j}$, chama-se produto interno de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ ao escalar

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2$$

Ou usando outra notação

$$\vec{u}|\vec{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 .$$

Geometricamente, o produto interno é o escalar dado da seguinte maneira:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta$$

Exemplo

Considere os seguintes vectores $\vec{u} = \vec{i}$ e $\vec{v} = 2\vec{i} + 2\vec{j}$. Calcule o produto interno $\vec{u} \cdot \vec{v}$.

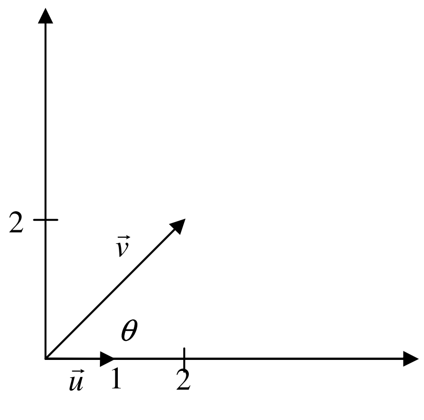
Recorrendo à definição algébrica, tem-se

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 1 \cdot 2 + 0 \cdot 2 = 2$

E, utilizando a definição geométrica, tem-se

$\|\vec{u}\| = 1$ e $\|\vec{v}\| = 2\sqrt{2}$

$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \, \|\vec{v}\| \cos\theta = 1 \cdot 2\sqrt{2} \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right) = 2$



[3] Para uma exposição mais completa desta matéria, recomenda-se a consulta de Ferreira, M.A.M. e Amaral, I. (2003). *Álgebra Linear, Vol. 2 Espaços Vectoriais*, Lisboa:Edições Sílabo.

Propriedades do Produto Interno

Dados quaisquer vectores $\vec{u}$, $\vec{v}$ e $\vec{w}$ e um escalar λ,

1. $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
2. $\vec{v} \cdot (\lambda \vec{w}) = \lambda(\vec{v} \cdot \vec{w}) = (\lambda \vec{v}) \cdot \vec{w}$
3. $(\vec{v} + \vec{w}) \cdot \vec{u} = \vec{v} \cdot \vec{u} + \vec{w} \cdot \vec{u}$

Ortogonalidade

Dois vectores quaisquer $\vec{u}$ e $\vec{v}$ não nulos dizem-se ortogonais ou perpendiculares se e só se:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$