ÁLGEBRA LINEAR, GEOMETRIA ANALÍTICA E ANÁLISE VECTORIAL

Sérgio Mendes
Helena Ferreira Soares

Dezembro 2008

Introdução ao cálculo diferencial em $\mathbb{R}^n$

1 Topologia em $\mathbb{R}^n$

Para medirmos distâncias entre pontos de $\mathbb{R}^n$ precisamos de uma noção de distância.

Definição 1.1. *Uma **norma** em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$\|.\| : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

verificando:

(i) $\|x\| \geq 0 \wedge \|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0;$

(ii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|;$

(ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$

O par $(\mathbb{R}^n, \|.\|)$ designa-se por **espaço normado**.

Exemplo 1.2.
São exemplos de normas em $\mathbb{R}^n$ as seguintes aplicações:
(i) $\|x\|_2 = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2};$
(ii) $\|x\|_1 = |x_1| + ... + |x_n|;$
(iii) $\|x\|_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i|.$

Definição 1.3. *Uma **métrica** (ou **distância**) em $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação*

$$d : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R},$$

verificando:

(i) $d(x, y) \geq 0 \wedge d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$;

(ii) $d(x, y) = d(y, x)$;

(iii) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$.

O par $(\mathbb{R}^n, d)$ designa-se por **espaço métrico**.

Toda a norma induz uma métrica: $d(x, y) := \|x - y\|$.

Definição 1.4. *Designa-se por bola de centro $a \in \mathbb{R}^n$ e raio $r > 0$ o conjunto:*

$$B(a, r) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) < r\}.$$

Exemplo 1.5.
São exemplos de métricas em $\mathbb{R}^n$ as seguintes aplicações:
(i) $d(x, y)_2 = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + ... + (x_n - y_n)^2}$;
(ii) $d(x, y)_1 = |x_1 - y_1| + ... + |x_n - y_n|$;
(ii) $d(x, y)_\infty = max_{1 \leq i \leq n} |x_i - y_i|$.

Os conjuntos $B(a, r), r > 0$ desempenham o mesmo papel em $\mathbb{R}^n$ que as vizinhanças desempenham em $\mathbb{R}$ no estudo de limites de funções.

Exercício: Verifique que, dado $a \in \mathbb{R}$, $V(a, r) = B(a, r)$, com $d(x, y) = |x - y|$ a distância usual em $\mathbb{R}$.

Exercício: Representar geometricamente em $\mathbb{R}^2$ a bola $B((0, 0), 1)$ para as métricas d_2, d_1 e d_∞.

Uma métrica em $\mathbb{R}^n$ permite definir conceitos topológicos tais como limites de sucessões e limites de funções. Prova-se que em $\mathbb{R}^n$ todas as topologias são equivalentes. Em particular, uma sucessão converge numa topologia se, e só se, também converge em qualquer topologia de $\mathbb{R}^n$. Por convenção usaremos sempre a **métrica euclideana** $d(x, y) = \|x - y\|_2$.

No que se segue, $X \subseteq \mathbb{R}^n$, $X^c = \mathbb{R}^n \backslash X$ é o complementar de X em $\mathbb{R}^n$, e $a = (a_1, ..., a_n)$ é um ponto de $\mathbb{R}^n$.

Definição 1.6.

(i) a é ***ponto interior*** *a* X *se existe* $r > 0$ *tal que* $B(a, r) \subset X$*;*

(ii) a é ***ponto exterior*** *a* X *se existe* $r > 0$ *tal que* $B(a, r) \subset X^c$*;*

(iii) a é ***ponto aderente*** *a* X *se dado* $r > 0$, $B(a, r) \cap X \neq \emptyset$*;*

(iv) a é ***ponto de acumulação*** *de* X *se dado* $r > 0, (B(a, r) \backslash \{a\}) \cap X \neq \emptyset$*;*

(v) a é ***ponto fronteiro*** *de* X *se dado* $r > 0$, $B(a, r) \cap X \neq \emptyset \wedge B(a, r) \cap X^c \neq \emptyset$*;*

(vi) a é ***ponto isolado*** *de* X *se existe* $r > 0$ *tal que* $B(a, r) \cap X = \{a\}$*;*

Notação:
$Int(X)$= **interior** de X=$\{$ pontos interiores de $X\}$;
$Ext(X)$= **exterior** de X=$\{$ pontos exteriores de $X\}$;
$\overline{X}$= **fecho ou aderência** de X=$\{$ pontos aderentes de $X\}$;
X'= **derivado** de X=$\{$ pontos de acumulação de $X\}$;
$fr(X) = \partial X$= **fronteira** de X=$\{$ pontos fronteiros de $X\}$.

Definição 1.7.

(i) X *é aberto se* $Int(X) = X$*;*

(ii) X *é fechado se* $\overline{X} = X$.

Exemplo 1.8.

(i) $B(a, r) \subset \mathbb{R}^n$ *é aberto;*

(ii) $\overline{B(a, r)} = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) \leq r\} \subset \mathbb{R}^n$ *é fechado;*

(ii) $\partial(B(a, r)) = \partial(\overline{B(a, r)}) = \{x \in \mathbb{R}^n : d(x, a) = r\}$.

Definição 1.9. $X \subset \mathbb{R}^n$ *diz-se* ***limitado*** *se estiver contido numa bola* $B(a, r)$, $a \in \mathbb{R}^n, r > 0$.

Exemplo 1.10. *As bolas são sempre conjuntos limitados. Um semiplano não é limitado.* $\mathbb{R}^2$ *não é limitado.*

2 Limites e continuidade

Vamos agora extender os conceitos de limite e continuidade a funções de várias variáveis. Começamos por estabelecer algumas definições gerais e fixar notação.

Recordar que uma função entre dois conjuntos A e B é uma correspondência que a cada $x \in A$ associa um e um só $y \in B$. Denotamos:

$$f : A \rightarrow B, x \mapsto y = f(x).$$

O conjunto A designa-se por domínio de f, B por conjunto de chegada e o conjunto $f(A) = \{f(x) : x \in A\} \subseteq B$ por contradomínio de f.

Definição 2.1. *Seja $D \subseteq \mathbb{R}^n$.*

(i) Designamos por ***função escalar*** *(ou* ***campo escalar****) uma função com valores em $\mathbb{R}$:*

$$f : D \to \mathbb{R}, (x_1, ..., x_n) \mapsto y = f(x_1, ..., x_n);$$

(ii) Designamos por ***função vectorial*** *(ou* ***campo vectorial****) uma função com valores em $\mathbb{R}^m$:*

$$f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, (x_1, ..., x_n) \mapsto (y_1, ..., y_m),$$

com $y_i = f_i(x_1, ..., x_n)$ função escalar, $i = 1, ..., m$.

Determinar o domínio é um dos problemas básicos do estudo de funções.

Exercício: Determine o domínio de

$$f(x, y) = (\frac{1}{\sqrt{4 - x^2 - y^2}}, \frac{1}{\sqrt{y - \sqrt{x}}}, \frac{xy}{|x| + |y|}).$$

Definição 2.2. *O* ***gráfico*** *de f é o conjunto*

$$Gr(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m : x \in D \ e \ y = f(x)\} \subset \mathbb{R}^{n+m}.$$

Conclui-se assim que a representação geométrica de $Gr(f)$ só é possível para os seguintes casos:

(i) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^2$ é uma curva no plano;

(ii) $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma superfície em $\mathbb{R}^3$;

(iii) $f : D \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $Gr(f) \subseteq \mathbb{R}^3$ é uma curva em $\mathbb{R}^3$.

Exercício:
Representar o gráfico de cada uma das seguintes funções:
(i) $f(x) = \sqrt{1 - x^2}$, $D = [-1, 1]$;
(ii) $z = f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1;$
(iii) $f(t) = (\cos t, \sin t)$, $D = [0, 2\pi]$.

Limite de funções de duas variáveis

Definição 2.3. *Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e (a, b)* ***ponto de acumulação*** *de D. Diz-se que $\ell \in \mathbb{R}$ é o* ***limite*** *de $f(x, y)$ em (a, b) e escreve-se*

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell$$

se é verdadeira a seguinte condição:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} < \varepsilon \wedge (x, y) \in D\backslash\{(a, b)\} \Rightarrow |f(x, y) - \ell| < \delta$$

A definição anterior designa-se por **definição de limite segundo Cauchy** (ou definição $\varepsilon - \delta$).

Salientemos que, tal como acontecia em $\mathbb{R}$, o limite, se existir, não depende da forma como (x, y) se aproxima de (a, b). Simplesmente, em $\mathbb{R}$ há apenas duas maneiras de x se aproximar de um ponto a: pela esquerda ou pela direita. No plano há infinitas maneiras (e direcções) de (x, y) se aproximar do ponto (a, b). Vejamos algumas.

• **Limites iterados:**

Designam-se por limites iterados os seguintes limites:

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) \qquad , \qquad \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)).$$

Conclui-se que:

(i) Se o limite existe, os limites iterados são iguais e coincidem com o valor do limite

$$\lim_{x\to a}(\lim_{y\to b} f(x, y)) = \lim_{y\to b}(\lim_{x\to a} f(x, y)) = \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y).$$

(ii) Se os limites iterados são diferentes não existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y)$.

(iii) No entanto, se os limites iterados são iguais, nada se conclui acerca da existência do limite.

• **Limites direccionais:**

Chamamos limites direccionais aos limites ao longo de uma curva contida em $D \subset \mathbb{R}^2$ que passe no ponto (a, b) (por exemplo, rectas, parábolas, etc).

Tal como no caso dos limites iterados conclui-se que:

(i) Se o limite existe, todos os limites direccionais, se existirem, são iguais e coincindem com o valor do limite $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

(ii) Se dois limites direcionais são diferentes não existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

(iii) Se algum limite direcional for diferente dos limites iterados então não existe $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x,y)$.

(iv) No entanto, a existência de limites direcionais nada permite concluir acerca da existência do limite.

Exemplo 2.4. *Vejamos se a função* $f(x,y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ *tem limite no ponto zero. Tem-se*

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2}{x^2} = \lim_{x\to 0} 1 = 1.$$

Por outro lado,

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}\right) = \lim_{y\to 0}\frac{-y^2}{y^2} = \lim_{x\to 0}(-1) = -1.$$

Como os limites direccionais são diferentes concluimos que não existe

$$lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}.$$

Exemplo 2.5. *Consideremos agora a função* $f(x,y) = xy/(x^2 + y^2)$ *e averiguemos se tem limite no ponto* $(0,0)$*. Facilmente se conclui que os limites iterados são iguais a zero. Donde, a existir, o limite será zero. No entanto, ao longo das rectas que passam na origem, o limite dá:*

$$\lim_{y=mx, x\to 0} f(x,mx) = \lim_{x\to 0}\frac{xmx}{x^2 + m^2x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Como o limite se existir é único, não pode depender do declive de cada recta que passa na origem. Conclui-se assim que f *não tem limite no ponto* $(0,0)$*.*

Exemplo 2.6. *Consideremos ainda a função* $f(x,y) = x^2y/(x^4 + y^2)$ *e averiguemos se tem limite no ponto* $(0,0)$*. Os limites iterados dão ambos zero, o mesmo sucedendo com os limites ao longo das rectas* $y = mx$ *que passam em* $(0,0)$*. No entanto, ao longo da parábola* $y = x^2$*, temos:*

$$\lim_{y=x^2, x\to 0} f(x,x^2) = \lim_{x\to 0}\frac{x^2x^2}{x^4 + x^4} = \frac{1}{2}.$$

Conclui-se que o limite não existe porque ao longo das rectas toma o valor 0 *enquanto que ao longo da parábola* $y = x^2$ *toma o valor* $1/2$*.*

Observação: A não existência do limite prova-se com limites iterados ou direccionais. Mas a existência do limite só é garantida pela definição "$\varepsilon - \delta$".

Quando usamos a definição "$\varepsilon - \delta$" é necessário conhecer desigualdades simples. Listamos de seguida algumas delas.

(i) $|x|, |y| \leq \sqrt{x^2 + y^2}$.

(ii) $x^2 \leq x^2 + y^2$.

(iii) $|xy| = |x||y| \leq \frac{1}{2}(x^2 + y^2)$.

(iv) $|x \pm y| \leq |x| + |y| \leq 2\sqrt{x^2 + y^2}$.

(iv) $|x^3 - y^3| \leq (x^2 + y^2)^{3/2}$.

Exercício: Prove cada uma das desigualdades anteriores.

Vejamos um exemplo de uma função que tem limite.

Exemplo 2.7. *Seja $f(x, y) = (2x^2y + 3y^3)/(x^2 + y^2)$. Mostremos que $f(x, y)$ tem limite no ponto $(0, 0)$. Notar que definição de limite não serve para determinar o valor do limite mas apenas para comprovar que o limite existe e tem determinado valor.*

Se o limite existe podemos calculá-lo por qualquer método: limites iterados, direccionais, etc. Se o limite existir, todos esses limites serão iguais. Facilmente se conclui que

$$\lim_{x \to 0} \left(\lim_{y \to 0} \frac{2x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} \right) = \lim_{x \to 0} \frac{0}{x^2} = 0.$$

Vamos agora usar a definição "$\varepsilon - \delta$" para mostrar que de facto o limite é zero. Para tal temos que mostrar que

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \sqrt{(x - 0)^2 + (y - 0)^2} < \varepsilon \wedge (x, y) \neq (0, 0) \Rightarrow |f(x, y) - 0| < \delta.$$

Tem-se então:

$$|f(x, y) - 0| = \left| \frac{2x^2y + 3y^3}{x^2 + y^2} \right| \leq \frac{2x^2|y| + 3y^2|y|}{x^2 + y^2} = 2\frac{x^2}{x^2 + y^2}|y| + 3\frac{y^2}{x^2 + y^2}|y|$$

$$\leq 2 \times 1 \times |y| + 3 \times 1 \times |y| = 5|y| \leq 5\sqrt{x^2 + y^2},$$

tendo em conta que $x^2 \leq x^2 + y^2 \Leftrightarrow \frac{x^2}{x^2+y^2} \leq 1$. Assim,

$$|f(x, y) - 0| < 5\sqrt{x^2 + y^2} < \delta \Rightarrow \sqrt{x^2 + y^2} < \delta/5.$$

Basta então tomar $\varepsilon \leq \delta/5$, para que se tenha $|f(x, y) - 0| < \delta$, sempre que $\sqrt{x^2 + y^2} < \varepsilon$.

Limite de funções de n variáveis

A definição 2.3 generaliza-se naturalmente a funções escalares com n variáveis:

Seja $f : D \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e $a = (a_1, ..., a_n)$ ponto de acumulação de D. Denotemos $x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$. Diz-se que $\ell \in \mathbb{R}$ é o limite de $f(x)$ em a e escreve-se

$$\lim_{x \to a} f(x) = \ell,$$

se é verdadeira a seguinte condição:

$$\forall \delta > 0, \exists \varepsilon > 0 : \sqrt{(x_1 - a_1)^2 + ... + (x_n - a_n)^2} < \varepsilon \wedge x \in D \backslash \{a\} \Rightarrow |f(x) - \ell| < \delta$$

Limite de funções vectoriais

Seja agora $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m, x \mapsto (f_1(x), ..., f_m(x))$ uma função vectorial e $a = (a_1, ..., a_n) \in \mathbb{R}^n$ ponto de acumulação de D. Dizemos que o limite de f no ponto a é $b = (b_1, ..., b_m) \in \mathbb{R}^m$, e escrevemos

$$\lim_{x \to a} f(x) = b$$

se $\lim_{x \to a} f_i(x) = b_i, 1 \leq i \leq m$.

Na prática, o limite de uma função vectorial existe se, e só se, existem os limites das m funções escalares.

Exemplo 2.8. *A função $f(x, y) = (xy^2 + 1, \frac{x^2}{x^2+y^2})$ não tem limite em $(0, 0)$, uma vez que $y_2 = \frac{x^2}{x^2+y^2}$ não tem limite em $(0, 0)$, como se conclui fazendo quer limites iterados quer limites ao longo das rectas que passam na origem.*

Continuidade e prolongamento por continuidade

Definição 2.9. *Uma função $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ diz-se contínua num ponto $(a, b) \in D$ se:*

$$\lim_{(x,y) \to (a,b)} f(x, y) = f(a, b).$$

Notar que a definição anterior diz duas coisas: f é contínua num ponto do domínio se: (i) o limite existe nesse ponto, (ii) o limite no ponto é igual ao valor da função no ponto. Naturalmente, só faz sentido falar em continuidade em pontos do domínio.

Se f não for contínua em (a, b), dizemos que é **descontínua** em (a, b). Se for contínua em todos os pontos de D, dizemos que **contínua em** D.

Observação: A definição generaliza-se para quaisquer funções escalares. Para funções vectoriais $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, f é contínua em $a \in D$ se, e só se, f_i é contínua em a, $1 \leq i \leq m$.

Definição 2.10. *Seja* $f : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *tal que*

(i) $(a, b) \in D'$ *e* $(a, b) \notin D$*;*

(ii) $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = \ell \in \mathbb{R}$.

Então, dizemos que f *é prolongável por continuidade em* (a, b) *e designamos* ***prolongamento por continuidade*** *de* f *ao ponto* (a, b) *a função*

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & ,(x, y) \in D \\ \lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) & ,(x, y) = (a, b). \end{cases}$$

Note que o domínio de $\widetilde{f}(x, y)$ é $D \cup \{(a, b)\}$. Note ainda que o prolongamento por continuidade é único.

Exemplo 2.11. *A função* $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}$ *tem limite zero no ponto* $(0, 0)$ *(prove!) e como tal admite o prolongamento por continuidade*

$$\widetilde{f}(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & ,(x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Qualquer outra função da forma

$$f^*(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x, y) \neq (0, 0) \\ k & ,(x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

com $k \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$ *é um prolongamento de* f *ao ponto* $(0, 0)$*. Porém, apenas* $\widetilde{f}$ *é continua em* $(0, 0)$*.*

3 Funções de classe C^1

Derivadas parciais de primeira ordem

Seja $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ e $(a, b) \in D$. Define-se a **derivada parcial de** f **em ordem a** x **em** (a, b) como sendo, caso exista, o seguinte limite:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a + h, b) - f(a, b)}{h}$$

Análogamente, a **derivada parcial de f em ordem a y em** (a,b) é, caso exista, o limite:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a,b+h) - f(a,b)}{h}$$

Observações:

(i) A generalização das definições anteriores ao caso de funções escalares de n variáveis é imediata.

(ii) Dada $f(x,y)$, para calcular $\frac{\partial f}{\partial x}$, usamos as regras de derivação usuais, considerando x como a variável e y como uma constante. Quanto a $\frac{\partial f}{\partial y}$, agora a variável é y e x é tratada como uma constante.

(iii) A definição de derivadas parciais generaliza-se facilmente a funções com n variáveis.

Exemplo 3.1. *Calculemos as derivadas parciais de* $f(x,y) = x^2e^{-y}$ *no ponto* $(1,0)$. *Pela definição, obtemos:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1+h,0) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(1+h)^2 - 1}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{2h + h^2}{h} = \lim_{h\to 0}(2+h) = 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(1,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(1,0+h) - f(1,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{h} = \lim_{h\to 0}(-1)\frac{e^{-h} - 1}{-h}$$

$$= -\lim_{h\to 0} \frac{e^{-h} - 1}{-h} = -1 \times 1 = -1.$$

Naturalmente, poderíamos simplesmente calcular as derivadas parciais pelas regras de derivação e depois substituir no ponto $(1,0)$*:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xe^{-y}_{|(1,0)} = 2 \times e^0 = 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -x^2e^{-y}_{|(1,0)} = -1 \times e^0 = -1.$$

Observação: Se a função estiver definida por expressões diferentes numa vizinhança do ponto (a,b), isto é, numa bola centrada em (a,b) de raio $r > 0$ arbitrariamente pequeno, então para calcular as derivadas parciais temos que **usar necessariamente** a definição.

Exemplo 3.2. *Calculemos as derivadas parciais da função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

no ponto $(0,0)$*. A função é definida fora da origem pela função racional* $\frac{x^3}{x^2+y^2}$ *e na origem por* 0*. Portanto, em qualquer bola centrada na origem, a função é definida por duas expressões diferentes. Temos assim que usar a definição.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{h^3}{h^2}-0}{h} = 1.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{0}{h^2}-0}{h} = 0.$$

É claro que para calcular as derivadas parciais de qualquer outro ponto diferente da origem, por exemplo, $(0,1)$*, ou* $(1/2,1/2)$*, etc, poderíamos usar as regras de derivação e depois subtituir no ponto referido. Notar que nesse caso a função, numa vizinhança desses pontos, é definida por uma única expressão: a função racional* $\frac{x^3}{x^2+y^2}$*.*

Exercício: Determine a expressão de $\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, para a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^3-y^2}{x^2+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Definição 3.3. *Uma função* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *definida num aberto* D *diz-se de* ***classe*** C^1 *em* D*, e escreve-se* $f \in C^1(D)$*, se existem e são contínuas as derivadas parciais* $\frac{\partial f}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f}{\partial y}$ *em* D*. Por vezes omitimos* D *e dizemos apenas que* f *é de classe* C^1*.*

Derivada dirigida

Definição 3.4. *Seja* $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$*, e seja* $\overrightarrow{u} = (u_1, u_2)$ *um vector de* $\mathbb{R}^2$*. Caso exista, designa-se por* ***derivada direccional*** *de* f *em* (a,b) *na direcção do vector* $\overrightarrow{u}$ *o seguinte limite*

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+hu_1, b+hu_2) - f(a,b)}{h}$$

Notação: $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{u}}(a,b) = f_{\overrightarrow{u}}(a,b)$

Escolhendo em vez de $\overrightarrow{u}$ o vector unitário $\overrightarrow{v} = \frac{\overrightarrow{u}}{\|\overrightarrow{u}\|} = (\frac{u_1}{\|\overrightarrow{u}\|}, \frac{u_2}{\|\overrightarrow{u}\|})$, a derivada $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a,b)$ designa-se por **derivada dirigida**.

Exemplo 3.5. *As derivadas parciais são um caso particular de derivadas dirigidas nas direcções dos versores dos eixos coordenados.*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{e_1}}(a,b) \ , \ \frac{\partial f}{\partial y}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{e_2}}(a,b),$$

com $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ *e* $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$.

Se $\overrightarrow{v}$ fizer um ângulo α com o eixo Ox, de $\cos\alpha = \frac{u_1}{\|\overrightarrow{u}\|}$ e $\sin\alpha = \frac{u_2}{\|\overrightarrow{u}\|}$, obtemos uma fórmula alternativa para calcular a derivada dirigida:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a,b) = \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)\cos\alpha + \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\sin\alpha.$$

Exemplo 3.6. *Calcular a derivada dirigida de* $f(x,y) = \ln(x^2+y^2)$ *em* $(-1,2)$ *nas direcções que fazem* $30°$ *com o eixo* Ox. *Temos então:*

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(-1,2) = \frac{\partial f}{\partial x}(-1,2)\cos(30°) + \frac{\partial f}{\partial y}(-1,2)\sin(30°)$$

$$= \left(\frac{2x}{x^2+y^2}\right)_{(-1,2)} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \left(\frac{2y}{x^2+y^2}\right)_{(-1,2)} \times \frac{1}{2} = \frac{-2}{5} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{4-2\sqrt{3}}{10}.$$

Gradiente de uma função

Definição 3.7. *Designa-se por* ***gradiente de*** f ***em*** (a,b) *o vector, que denotaremos por* ∇f,

$$\nabla f(a,b) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(a,b), \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)\right).$$

A derivada direccional e o gradiente estão relacionados pela seguinte fórmula:

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a,b) = \nabla f(a,b).\overrightarrow{v},$$

onde "." denota o produto interno usual em $\mathbb{R}^2$. A definição de gradiente generaliza-se de maneira óbvia a $\mathbb{R}^n$.

Interpretação geométrica do gradiente

Usando a conhecida fórmula do produto interno

$$\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a,b) = \nabla f(a,b).\overrightarrow{v} = \|\nabla f(a,b)\|\|\overrightarrow{v}\|\cos\alpha$$

tiramos a seguinte conclusão:

Se $\cos\alpha = 0$, ou seja, se $\nabla f(a,b)\|\overrightarrow{v}$, então $\frac{\partial f}{\partial \overrightarrow{v}}(a,b)$ é máxima. Por outras palavras, a **taxa de maior variação de** f no ponto (a,b) ocorre precisamente na direcção do gradiente, $\overrightarrow{v} = \frac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|}$, e tem o valor

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|}\right)}(a,b) = \nabla f(a,b).\frac{\nabla f(a,b)}{\|\nabla f(a,b)\|} = \frac{\|\nabla f(a,b)\|^2}{\|\nabla f(a,b)\|} = \|\nabla f(a,b)\|.$$

Exemplo 3.8. *A temperatura num ponto (x,y) numa região do plano é dada pela seguinte função:*

$$T(x,y) = e^{\frac{x}{y^2+1}}$$

Qual a direcção em que a temperatura aumenta mais no ponto $(1,1)$? Quanto aumenta nessa direcção?

Tendo em conta a fórmula precedente, a temperatura aumenta mais na direcção do gradiente $\nabla T(1,1)$, ou seja na direcção do vector

$$\nabla T = \left(\frac{1}{y^2+1}e^{\frac{x}{y^2+1}}, \frac{-2xy}{(y^2+1)^2}e^{\frac{x}{y^2+1}}\right) \Rightarrow \nabla T(1,1) = \left(\frac{\sqrt{e}}{2}, \frac{-\sqrt{e}}{2}\right).$$

O aumento da temperatura é dado por

$$\frac{\partial f}{\partial\left(\frac{\nabla f}{\|\nabla f\|}\right)}(1,1) = \|\nabla f(1,1)\| = \sqrt{\frac{e}{4}+\frac{e}{4}} = \sqrt{\frac{e}{2}}.$$

4 Diferenciabilidade

Sabemos do estudo de funções de uma variável que diferenciabilidade implica continuidade. Por isso, dizemos que ser diferenciável é uma condição mais forte do que ser contínua. O recíproco é falso. Basta pensar na função $f(x) = |x|$ que é contínua em $\mathbb{R}$ mas que não é diferenciável em 0.

É fácil verificar que a existência de derivadas parciais finitas é uma condição muito fraca de regularidade da função, não garantindo sequer que a função seja continua. Por exemplo, a função

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2y}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

tem derivadas parciais finitas em $(0,0)$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = 0,$$

e no entanto vimos anteriormente que não é contínua em $(0,0)$.

Isto significa que precisamos de definir um conceito de regularidade mais forte do que a existência de derivadas parciais. Esse conceito designa-se, tal como para funções a uma variável, **diferenciabilidade**.

Definição 4.1. *Seja $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Dizemos que f é **diferenciável em** a se existem as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_i}(a)$ e se existe uma função linear $Df(a) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tal que:*

$$\lim_{(h_1,...,h_n)\to(0,...,0)} \frac{|f(a+h) - f(a) - Df(a)(h)|}{\|h\|} = 0.$$

*Dizemos que f é **diferenciável** se for diferenciável em todos os pontos de D.*

Observação:
A matriz de função linear $Df(a)$ é precisamente a matriz Jacobiana:

$$Df(a) = J_f(a) = \nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}(a)\right).$$

No caso $n = 2$, a definição anterior é equivalente a afirmar que f é diferenciável em (a,b) se existem $\frac{\partial f}{\partial x}(a,b)$ e $\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)$ e além disso

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)} \frac{|f(a+h,b+k) - f(a,b) - h\frac{\partial f}{\partial x}(a,b) - k\frac{\partial f}{\partial y}(a,b)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Exemplo 4.2. *A função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é diferenciável em $(0,0)$*. De facto, tem-se*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(0,h)-f(0,0)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{0-0}{h} = 0.$$

Portanto, resta verificar se

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)-f(0,0)-h\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)-k\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = 0.$$

Mas, da expressão anterior obtemos

$$\lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{|f(h,k)-f(0,0)|}{\sqrt{h^2+k^2}} = \lim_{(h,k)\to(0,0)}\frac{hk}{h^2+k^2},$$

que como sabemos não tem limite no ponto $(0,0)$*. Basta ver que o limite ao longo das rectas* $k = mh$ *não existe*

$$\lim_{h\to 0}\frac{hmh}{h^2+m^2h^2} = \lim_{h\to 0}\frac{m}{1+m^2} = \frac{m}{1+m^2}.$$

Diferenciabilidade de funções vectoriais

A generalização da noção de diferenciabilidade a funções vectoriais é imediata.

Definição 4.3. *Seja* $f : D \to \mathbb{R}^m$*,* $D \subset \mathbb{R}^n$ *aberto e* $a = (a_1, ..., a_n) \in D$*. Dizemos que* f *é* ***diferenciável em*** a *se* $f_i : D \to \mathbb{R}$ *é diferenciável em* a*, para todo* $i = 1, ..., m$*. Dizemos que* f *é* ***diferenciável*** *se* f *é diferenciável em todos os pontos de* D*.*

Definição 4.4. *Designa-se por matriz Jacobiana de* f *no ponto* a *à matriz* $m \times n$ *da função linear* $Df(a)$

$$J_f(a) = Df(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(a) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(a) \end{pmatrix}$$

Notar que, para $m = 1$*,* $J_f(a) = \nabla f(a)$*.*

Outra notação comum para matriz Jacobiana é a seguinte

$$J_f(a) = \frac{\partial(f_1, ..., f_m)}{\partial(x_1, ..., x_n)}(a).$$

Exemplo 4.5. *Calcular a matriz Jacobiana da função*

$$f(x,y,z) = (x\sin y + e^{yz}, x^3 \ln z - yz)$$

num ponto (x,y) do domínio. Tem-se:

$$J_f = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} & \frac{\partial f_1}{\partial z} \\ \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} & \frac{\partial f_2}{\partial z} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin y & x\cos y + ze^{yz} & ye^{yz} \\ \\ 3x^2 \ln z & -z & \frac{x^3}{z} - y \end{pmatrix}.$$

Plano tangente: interpretação geométrica da derivada

Já vimos que o gráfico de uma função $z = f(x,y)$ de duas variáveis é uma superfície em $\mathbb{R}^3$. Vamos agora determinar uma equação do plano tangente ao gráfico de f num ponto (x_0, y_0, z_0), conde $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Recordemos que a equação de um plano que passa no ponto (x_0, y_0, z_0) e tem um vector normal (A, B, C) é dada por

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0.$$

Se admitirmos que o plano não é vertical, um vector perpendicular à superfície $z = f(x,y)$ no ponto (x_0, y_0, z_0) é dado por

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), 1\right).$$

Assim, a equação do plano tangente ao gráfico de f no ponto $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ é dada por:

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Exemplo 4.6. *Determinar a equação do plano tangente ao parabolóide elíptico $z = x^2 + 2y^2$ no ponto $(1, 2, 9)$. Tem-se:*

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(1,2) = 2.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(1,2) = 8.$$

Donde se conclui que a equação do plano tangente é dada por

$$z = 9 + 2(x-1) + 8(y-2) \Leftrightarrow z = 2x + 8y - 9.$$

O plano tangente permite a seguinte interpretação geométrica da derivada, em tudo análoga ao caso das funções de uma variável:

para pontos numa vizinhança arbitrariamente pequena do ponto (a, b), ou seja, para pontos (x, y) do dominio de f dentro de uma bola centrada em (a, b) e de raio $r > 0$ suficientemente pequeno, o plano tangente dá-nos uma razoável aproximação (linear) ao gráfico de f:

$$f(x, y) = f(a + h, b + k) \approx f(a, b) + h\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) + k\frac{\partial f}{\partial y}(a, b). \tag{4.1}$$

Em particular, a fórmula 4.1 permite calcular valores aproximados, usando a aproximação linear de f dada pelo plano tangente.

Exemplo 4.7. *Seja* $f(x, y, z) = \sqrt{x}e^z - \ln y + \sqrt{y}\sin z$. *Determinemos o valor aproximado de* $f(3.9, 1.01, 0.1)$. *Começamos por notar que*

$$(3.9, 1.01, 0.1) = (4 - 0.1, 1 + 0.01, 0 + 0.1).$$

Calculemos as derivadas parciais.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{e^z}{2\sqrt{x}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}(4, 1, 0) = \frac{1}{4} = 0,25.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{y} + \frac{\sin z}{2\sqrt{y}} \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial y}(4, 1, 0) = \frac{1}{1} + \frac{\sin 0}{2} = 1,25.$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4y \Rightarrow \frac{\partial f}{\partial z}(4, 1, 0) = e^0\sqrt{4} + \sqrt{1}\cos 0 = 2 + 1 = 3.$$

Por outro lado,

$$f(4, 1, 0) = 2 + 0 + 0 = 2.$$

Assim,

$$f(3.9, 1.01, 0.1) \approx 2 + 0,25 \times (-0,1) + 1 \times (0,01) + 3 \times (0,1)$$

$$= 2 - 0,025 + 0,1 + 0,3 = 2,285.$$

Diferencial de primeira ordem de uma função escalar

Fazendo $h = dx$ e $k = dy$ em 4.1, obtemos

$$df(a, b) := \frac{\partial f}{\partial x}(a, b)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)dy.$$

Designamos $df(a,b)$ o **diferencial de primeira ordem** de f no ponto (a,b). A generalização do conceito de diferencial de primeira ordem a uma função escalar arbitrária $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é imediata.

Uma consequência importante do conceito de diferenciabilidade é o seguinte resultado.

Proposição 4.8. *Seja $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Suponhamos que f é diferenciável em a. Então, f é contínua em a.*

Exemplo 4.9. *A função*

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^4+y^2} & ,(x,y) \neq (0,0) \\ 0 & ,(x,y) = (0,0) \end{cases}$$

não é contínua em $(0,0)$, logo não é diferenciável em $(0,0)$.

O seguinte resultado dá-nos uma condição necessária e suficiente para que uma função, escalar ou vectorial, seja diferenciável.

Proposição 4.10. *Seja $f : D \to \mathbb{R}^m$, $D \subset \mathbb{R}^n$ aberto e $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Suponhamos f é de classe C^1 numa bola aberta centrada em a (isto é, supor que existem e são continuas as derivadas parciais $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}, i = 1, ..., m, j = 1, ..., n$ numa bola centrada em a). Então, f é diferenciável em a.*

Exemplo 4.11. *Consideremos a função*

$$f(x,y) = \left(\frac{\sin x + e^y}{x^2+y^2}, \frac{1}{x^2+y^2-1} \right).$$

Calculemos as derivadas parciais de primeira ordem.

$$\frac{\partial f_1}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\sin x + e^y}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2)\cos x - 2x(\sin x + e^y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

$$\frac{\partial f_1}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\sin x + e^y}{x^2+y^2} \right) = \frac{(x^2+y^2)e^y - 2y(\sin x + e^y)}{(x^2+y^2)^2}.$$

Concluímos que $\frac{\partial f_1}{\partial x}$ e $\frac{\partial f_1}{\partial y}$ são contínuas em $\mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$. Por outro lado,

$$\frac{\partial f_2}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{1}{x^2+y^2-1} \right) = \frac{-2x}{(x^2+y^2-1)^2}.$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{1}{x^2+y^2-1}\right) = \frac{-2y}{(x^2+y^2-1)^2}.$$

Donde se conclui que $\frac{\partial f_2}{\partial x}$ *e* $\frac{\partial f_2}{\partial y}$ *são contínuas em* $\mathbb{R}^2$ *excepto nos pontos da equação* $x^2+y^2=1$. *Concluímos assim pelo Teorema que* f *é diferenciável em* $\mathbb{R}^2$ *excepto na origem e nos pontos da circunferência unitária* $x^2+y^2=1$.

Derivada da função composta

O próximo resultado generaliza a noção de derivada da função composta a funções de várias variáveis.

Teorema 4.12. *Sejam* $f : A \to \mathbb{R}^m, g : B \to \mathbb{R}^p$, $A \subset \mathbb{R}^n$, $B \subset \mathbb{R}^m$ *abertos. Supor que* $f(A) \subset B$. *Se* f *é diferenciável em* a *e* g *é diferenciável em* $b = f(a)$, *então* $g \circ f$ *é diferenciável em* a. *Além disso,*

$$D(g \circ f)(a) = D(g)(b)D(f)(a).$$

Exemplo 4.13. *Suponhamos que as funções* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$, $t \mapsto (x(t), y(t))$ *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto g(x, y)$ *são ambas diferenciáveis. Então,* $g \circ f$ *é diferenciável. Calculemos a expressão de* $(g \circ f)'(t)$.

$$D(f)(t) = \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$$

$$D(g)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}.$$

Assim,

$$(g \circ f)'(t) = D(g \circ f)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \frac{\partial g}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{dy}{dt}.$$

Exemplo 4.14. *Sejam agora* $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, *e* $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, *duas funções, com* $f(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ *e* $g(x, y)$ *ambas diferenciáveis. Então,* $g \circ f$ *é diferenciável. Além disso,*

$$D(f)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}$$

$$D(g)(x, y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix},$$

donde se conclui que

$$D(g \circ f)(t) = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial t} \\ \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial g}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial g}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} \end{pmatrix}.$$

5 Funções de classe C^2

Dada uma função $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, se a função $\frac{\partial f}{\partial x}$ admitir derivadas parciais em ordem a x e em ordem a y no ponto (a, b), definimos as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(a,b+h) - \frac{\partial f}{\partial x}(a,b)}{h}.$$

Análogamente, se $\frac{\partial f}{\partial y}$ admitir derivadas parciais em ordem a x e em ordem a y no ponto (a, b), definimos as derivadas parciais de segunda ordem

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(a,b) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a+h,b) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a,b) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)(a,b) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(a,b+h) - \frac{\partial f}{\partial y}(a,b)}{h}.$$

A noção de derivadas parciais de segunda ordem ou de ordem superior generaliza-se facilmente a qualquer função escalar $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

Definição 5.1. *Uma função escalar $f : D \to \mathbb{R}$, definida num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$ diz-se de classe $C^2(D)$ se todas as derivadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}$ forem de classe $C^1(D)$ (ou seja, se $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ admite derivadas parciais em ordem a todas as variáveis x_j e $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$ forem contínuas, $i, j = 1, ..., n$).*

Exemplo 5.2. *Seja $f(x, y) = x^3 y - xy^3$. Então,*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(3x^2 y - y^3) = 6xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(x^3 - 3xy^2) = -6xy.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}(3x^2 y - y^3) = 3x^2 - 3y^2.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}(x^3 - 3xy^2) = 3x^2 - 3y^2.$$

No exemplo anterior vimos que as derivadas mistas de segunda ordem são iguais

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}.$$

O Teorema seguinte mostra que essa igualdade não é uma simples coincidência.

Teorema 5.3 (Teorema de Schwartz). *Seja f uma função de classe C^2 num aberto $D \subset \mathbb{R}^n$. Então*

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}, i, j = 1, ..., n, i \neq j.$$

Exemplo 5.4. *Consideremos a função*

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Conclui-se que

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{x^4 y + 4x^2 y^3 - y^5}{(x^2 + y^2)^2},$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^5 - 4x^3 y^2 - xy^4}{(x^2 + y^2)^2},$$

sempre que $(x, y) \neq (0, 0)$. Além disso,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0,$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(0, h) - f(0, 0)}{h} = 0.$$

No entanto,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial x}(0, h) - \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{-h^5}{h^4} - 0}{h} = -1.$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(h, 0) - \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{h^5}{h^4} - 0}{h} = 1.$$

Quer isto dizer que este exemplo contraria o Teorema de Schwartz? É claro que não. Significa apenas que esta função não satisfaz as condições do Teorema, ou seja, uma das funções (ou ambas) $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ não é contínua no ponto $(0, 0)$, e como tal f não é de classe C^2.

Definição 5.5. *Seja f uma função de classe C^2 num aberto $D \subset \mathbb{R}^2$. Designa-se por matriz Hessiana de f no ponto $a = (a_1, ..., a_n) \in D$ a matriz $n \times n$*

$$H_f(a) = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(a) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2}(a) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(a) & \dots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(a) \end{pmatrix}$$

Notar que, tendo em conta o Teorema de Schwartz, a matriz Hessiana é simétrica.

6 Extremos relativos

Vamos agora estudar condições necessárias e suficientes para a existência de extremos relativos (ou locais) de funções escalares de várias variáveis.

Definição 6.1. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $a = (a_1, ..., a_n) \in D$. Dizemos que*

(i) f tem um ***máximo relativo*** *em a se existe $r > 0$ tal que*

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in D \cap B(a, r).$$

(ii) f tem um ***máximo absoluto*** *em a se*

$$f(a) \geq f(x), \forall x \in D.$$

(iii) f tem um ***mínimo relativo*** *em a se existe $r > 0$ tal que*

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in D \cap B(a, r).$$

(iv) f tem um ***mínimo absoluto*** *em a se*

$$f(a) \leq f(x), \forall x \in D.$$

Existência de extremos: condições de primeira ordem

Teorema 6.2. *Seja $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe C^1 em $Int(D)$ e seja $a \in Int(D)$ um ponto onde f tem um máximo ou um mínimo. Então,*

$$\nabla f(a) = 0.$$

Definição 6.3. *As soluções do sistema*

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0 \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n} = 0 \end{cases}$$

designam-se por ***pontos de estacionaridade*** *ou* ***pontos críticos*** *de f.*

O Teorema anterior dá-nos uma condição necessária para a existência de extremos relativos. Dito de outra forma, os pontos de estacionariedade de f são os candidatos a extremos relativos. As equações $\nabla f = 0$ designam-se habitualmente por condições de primeira ordem. Notar, no entanto, que há pontos que satisfazem as condições de primeira ordem mas que não são nem pontos de máximo nem pontos de mínimo. Esses pontos designa-se por **pontos de sela**.

Exemplo 6.4. *Consideremos a função $f(x, y) = x^2 - y^2$. Então, $(0, 0)$ é ponto de estacionaridade, como se vê resolvendo o sistema*

$$\nabla f(x) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x = 0 \\ 2y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \end{cases}$$

Porém, não é nem ponto de máximo nem ponto de mínimo. De facto, dado $r > 0$, tem-se:

$$f(0, 0) = 0 \geq f(0, y) = -y^2, \ \textit{para } (0, y) \in B((0, 0), r);$$
$$f(0, 0) = 0 \leq f(x, 0) = x^2, \ \textit{para } (x, 0) \in B((0, 0), r).$$

Classificação dos extremos: condições de segunda ordem

O problema do estudo completo dos máximos e mínimos de funções escalares de várias variáveis é geralmente um problema complicado. No entanto, uma classificação parcial é possível, usando o determinante da matriz Hessiana de f (designado por Hessiano de f). Começamos com o caso das funções de duas variáveis.

Teorema 6.5. *Seja $(a, b) \in Int(D)$ um ponto de estacionaridade de $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, com $f \in C^2(Int(D))$. Então,*

(i) se $|H_f(a, b)| > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} > 0$, f tem um ***mínimo relativo*** *em (a, b).*

(ii) se $|H_f(a, b)| > 0$ e $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} < 0$, f tem um ***máximo relativo*** *em (a, b).*

(iii) se $|H_f(a,b)| < 0$, (a,b) *é* ***ponto de sela***.

(iv) Em qualquer outro caso não se conclui nada usando a matriz Hessiana.

Exemplo 6.6. *Consideremos a função* $f(x,y) = x^3 - y^3 + xy$. *Determinemos os pontos de estacionaridade*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 3x^2 + y = 0 \\ \\ -3y^2 + x = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = \frac{1}{3} \\ \\ y = \frac{-1}{3} \end{cases}$$

Portanto, existem dois pontos de estacionaridade, $(0,0)$ *e* $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$. *Calculemos agora a Hessiana de* f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 1 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -6y.$$

A matriz Hessiana no ponto $(0,0)$ *tem determinante*

$$|H_f(0,0)| = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -1 < 0.$$

Concluímos assim que $(0,0)$ *é ponto de sela. Por outro lado, a matriz Hessiana no ponto* $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$ *tem determinante*

$$\left| H_f\left(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}\right) \right| = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 3 > 0.$$

Como além disso, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3}) = 2 > 0$ *concluímos que* f *tem um mínimo relativo em* $(\frac{1}{3}, \frac{-1}{3})$.

As condições de segunda ordem podem também ser expressas em termos do sinal dos valores próprios da matriz Hessiana. A sua generalização a funções escalares de n variáveis é imediata, pelo que apresentaremos o resultado no caso mais geral. Nas aplicações, no entanto, consideramos sempre funções de duas ou três variáveis para simplificar o cálculo dos valores próprios.

Teorema 6.7. *Seja* $a = (a_1, ..., a_n) \in Int(D)$ *um ponto de estacionaridade de* $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, *com* $f \in C^2(Int(D))$. *Então,*

(i) se todos os valores próprios de $H_f(a)$ *são positivos,* f *tem um* ***mínimo relativo*** *em* a.

(ii) se todos os valores próprios de $H_f(a)$ *são negativos,* f *tem um* ***máximo relativo*** *em* a.

(iii) *se existem pelos menos dois valores próprios de $H_f(a)$ com sinal diferente, a é* ***ponto de sela****.*

(iv) *Se existe algum valor próprio nulo de $H_f(a)$, e pelo menos dois valores próprios de $H_f(a)$ com sinal diferente, a é ainda* ***ponto de sela****.*

(v) *Se existe algum valor próprio nulo de $H_f(a)$, e todos os outros têm o mesmo sinal, nada podemos concluir àcerca da natureza do ponto a.*

Exemplo 6.8. *Seja $f(x,y,z) = z^3 - z + zy^2 - x^2$. Determinemos os pontos de estacionaridade*

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial x} = -2x = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial y} = 2zy = 0 \\ \\ \frac{\partial f}{\partial z} = 3z^2 - 1 + y^2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0 \\ \\ y = 0 \\ \\ 3z^2 - 1 = 0 \end{cases} \vee \begin{cases} x = 0 \\ \\ y^2 - 1 = 0 \\ \\ z = 0 \end{cases}$$

Existem assim quatro pontos de estacionaridade:

$$(0, \pm 1, 0), (0, 0, \pm \frac{1}{\sqrt{3}}).$$

Calculemos agora a Hessiana de f.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -2 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = 0 \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2z \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = 2y \ , \ \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6z.$$

A matriz Hessiana no ponto $(0,1,0)$ é

$$H_f(0,1,0) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

e os seus valores próprios são

$$|H_f(0,1,0) - \lambda I_3| = \begin{vmatrix} -2-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda & 2 \\ 0 & 2 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow \lambda = -2 \vee \lambda = -2 \vee \lambda = 2.$$

Tendo em conta que há valores próprios positivos e negativos concluímos que $(0,1,0)$ é ponto de sela. Analogamente se pode verificar que $(0,-1,0)$ é ponto de sela.

A matriz Hessiana no ponto $(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ *é*

$$H_f(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e os seus valores próprios são

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = \frac{2}{\sqrt{3}}, \lambda_3 = 2\sqrt{3}.$$

Portanto, $(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}})$ *é ponto de sela.*

Finalmente, a matriz Hessiana no ponto $(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$ *é dada por*

$$H_f(0,0,\frac{1}{\sqrt{3}}) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{3}} & 0 \\ 0 & 0 & -2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

e tem valores próprios

$$\lambda_1 = -2, \lambda_2 = -\frac{2}{\sqrt{3}}, \lambda_3 = -2\sqrt{3}.$$

Assim, f *tem um máximo relativo em* $(0,0,-\frac{1}{\sqrt{3}})$.

7 Operadores diferenciais

Nesta última secção definimos alguns operadores diferenciais e algumas identidades por eles verificadas.

Denotaremos os vectores da base canónica de $\mathbb{R}^3$ por

$$i = (1,0,0), j = (0,1,0), k = (0,0,1).$$

Seja $D \subset \mathbb{R}^n$ um aberto e denotemos por $C^k(D,\mathbb{R})$ (resp., $C^k(D,\mathbb{R}^m)$ as funções escalares (resp., funções vectoriais) de classe C^k em D, $k = 0,1,2$.

Definição 7.1. *O operador* ***gradiente*** *é o operador diferencial*

$$\nabla : C^1(D,\mathbb{R}) \to C^0(D,\mathbb{R}^n),$$

dado por

$$\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

Definição 7.2. *O operador* ***divergência*** *de um campo vectorial* $F = (F_1, F_2, F_3)$ *é o operador diferencial*

$$div : C^1(D, \mathbb{R}^3) \to C^0(D, \mathbb{R}),$$

dado por

$$divF = \nabla.F = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}.$$

Tal como a notação indica, $divF$ é precisamente o produto interno

$$\nabla.F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right).(F_1, F_2, F_3).$$

Interpretação fisica da divergência:
A divergência de F mede a taxa com que o campo vectorial se expande (caso em que $\nabla.F > 0$) ou se contrai (caso em que $\nabla.F < 0$).

Definição 7.3. *O operador* ***rotacional*** *de um campo vectorial* $F = (F_1, F_2, F_3)$ *é o operador diferencial*

$$rot : C^1(D, \mathbb{R}^3) \to C^0(D, \mathbb{R}^3),$$

dado por

$$rotF = \nabla \times F = \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right)k.$$

Uma vez mais, tal como a notação indica, $rotF$ é precisamente o produto externo

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) \times (F_1, F_2, F_3).$$

Observação: As definições anteriores também se aplicam a campos no plano, isto é, $F = (F_1, F_2)$. Para isso basta omitir a coordenada F_3. Nesse caso, o **rotacional no plano** dá a seguinte função escalar:

$$\nabla \times F = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}\right) \times (F_1, F_2) = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}.$$

Interpretação fisica do rotacional:
Suponhamos que $\overrightarrow{v}$ é um campo vectorial que representa a velocidade de um fluido em movimento. Então, $rot\overrightarrow{v}$ num determinado ponto (x_0, y_0, z_0) representa a tendência que as particulas têm de rodar em torno do eixo que aponta na direcção do vector $rot\overrightarrow{v}(x_0, y_0, z_0)$. Se $rot\overrightarrow{v} = 0$ o fluido diz-se **irrotacional**.

Definição 7.4. *Um campo vectorial* $F : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ *diz-se um* ***campo conservativo*** *se existe um campo escalar* $f : D \subset \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ *tal que* $F = \nabla f$.

Teorema 7.5 (Rotacional do gradiente)**.** *Dada uma função escalar* f *de classe* C^2 *num aberto* $D \subset \mathbb{R}^3$,

$$\nabla \times (\nabla f) = 0.$$

Ou seja, o rotacional de um campo conservativo é zero.

Teorema 7.6 (Divergência do rotacional)**.** *Dada um campo vectorial* F *de classe* C^2 *num aberto* $D \subset \mathbb{R}^3$,

$$div\ rot F = \nabla.(\nabla \times F) = 0.$$

Definição 7.7. *Seja* f *um campo escalar de classe* C^2 *num aberto* $D \subset \mathbb{R}^3$. *Designa-se* ***Laplaciano de*** f *o campo escalar*

$$\nabla^2 f = \nabla.\nabla f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}.$$

Exercício:
Estabeleça as seguintes identidades:

(i) $div(fF) = f div F + (\nabla f).F$.

(ii) $rot(fF) = f rot F + (\nabla f) \times F$.

(iii) $\nabla(r^n) = n r^{n-1} r$.

(iv) $\nabla^2(\frac{1}{r}) = 0, r \neq 0$.

Aconselhamos os alunos interessados a ler as excelentes notas dos Professores Jerrold Marsden e Anthony Tromba, que se encontram no link abaixo.

http://bcs.whfreeman.com/marsdenvc5e/