**Sugestão de correção e cotações da Ficha de Avaliação 7**

|  |
| --- |
| **Grupo I** |
| **Questão** | **Proposta de resolução** | **Cotação** |
| **1** | **(D)**O módulo de $z=8-6i$ é:$$\left|z\right|=\sqrt{8^{2}+\left(-6\right)^{2}}=\sqrt{64+36}=\sqrt{100}=10$$ | **8** |
| **2** | **(D)**Como $1+i$é uma raiz da equação $x^{2}+kx-k=0$ tem-se:$$\left(1+i\right)^{2}+k\left(1+i\right)-k=0⇔$$$$⇔1+2i-1+k+ki-k=0⇔$$$$⇔\left(2+k\right)i=0⇔$$$$⇔2+k=0⇔$$$$⇔k=-2$$ | **8** |
| **3** | **(B)**Como $z$éum número complexo de argumento $\frac{π}{7}$, então $z=\left|z\right|e^{i\frac{π}{7}}$.Logo, o produto de $-i$por $\overbar{z}$ é dado por:$$-i×\overbar{z}=e^{i\frac{3π}{2}}×\left|\overbar{z}\right|e^{-i\frac{π}{7}}=\left|\overbar{z}\right|e^{i\left(\frac{3π}{2}-\frac{π}{7}\right)}=\left|\overbar{z}\right|e^{i\frac{19π}{14}}$$Um argumento do complexo resultante do produto de $-i$por $\overbar{z}$ é $\frac{19π}{14}$. | **8** |
| **4** | **(C)**Comecemos por escrever $w=-2+2i$ na forma trigonométrica:$$\left|w\right|=\sqrt{\left(-2\right)^{2}+2^{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$Seja $θ$ um argumento de $w$:$\tan(θ)=\frac{2}{-2} ∧ θ \in 2.º Quadrante ⇒ θ=\frac{3π}{4}$, por exemplo.Logo, $w=2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}}$.Portanto, $$z×\frac{1}{w}=e^{i\frac{4π}{3}}×\frac{1}{2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}e^{i\left(\frac{4π}{3}-\frac{3π}{4}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{4}e^{i\frac{7π}{12}}$$ | **8** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **5** | **(A)**Seja $z=x+yi$, $x, y\in R$.$$z+\overbar{z}=24 ∧z\overbar{z}\leq 169⇔$$$$⇔x+yi+x-yi=24 ∧ \left(x+yi\right)\left(x-yi\right)\leq 169⇔$$$$⇔2x=24 ∧ x^{2}+y^{2}\leq 169⇔$$$$⇔x=12 ∧ x^{2}+y^{2}\leq 169⇔$$$$⇔x=12 ∧ y^{2}\leq 169-12^{2}⇔$$$$⇔x=12 ∧ y^{2}\leq 25⇔$$$$⇔x=12 ∧ -5\leq y\leq 5$$Portanto, o comprimento da linha é 10.  | **8** |
| **Grupo II** |
| **Questão** | **Proposta de resolução** | **Cotação**  |
| **1.1** | Consideremos os números complexos $z\_{1}=3-2i$ e $z\_{2}=-1+i$.$$\overbar{\overbar{z\_{1}}+\overbar{\overbar{z\_{2}}}}-\left(2z\_{1}+i\right)=\overbar{3+2i+\left(-1+i\right)}-\left(2\left(3-2i\right)+i\right)=$$$$=\overbar{2+3i}-\left(6-3i\right)=2-3i-6+3i=-4 \in R$$ | **15** | **30** |
| **1.2** | Consideremos os números complexos $z\_{1}=3-2i$ e $z\_{2}=-1+i$.$$\frac{z\_{1}^{2}-i^{35}}{z\_{2}}$$Como $35=8×4+3$, $i^{35}=i^{3}=-i$.$$\frac{z\_{1}^{2}-i^{35}}{z\_{2}}=\frac{\left(3-2i\right)^{2}-\left(-i\right)}{-1+i}=$$$$=\frac{9-12i-4+i}{-1+i}=$$$$=\frac{5-11i}{-1+i}=$$$$=\frac{\left(5-11i\right)\left(-1-i\right)}{\left(-1+i\right)\left(-1-i\right)}=$$$$=\frac{-5-5i+11i-11}{1+1}=$$$$=\frac{-16+6i}{2}=$$$$=-8+3i$$ | **15** |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **2.1.1** | Consideremos os números complexos $z\_{1}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z\_{2}=e^{-i\frac{π}{4}}$ e $z\_{3}=27e^{i\frac{π}{6}}$$$6z\_{1}+2z\_{2}=6\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)+2e^{-i\frac{π}{4}}=$$$$=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i+2\left(\cos(\left(-\frac{π}{4}\right))+i\sin(\left(-\frac{π}{4}\right))\right)=$$$$=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i+2\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=$$$$=6\sqrt{2}+6\sqrt{2}i+\sqrt{2}-\sqrt{2}i=$$$$=7\sqrt{2}+5\sqrt{2}i$$ | **15** | **45** |
| **2.1.2** | Consideremos os números complexos $z\_{1}=\sqrt{2}+\sqrt{2}i$, $z\_{2}=e^{-i\frac{π}{4}}$ e $z\_{3}=27e^{i\frac{π}{6}}$$$z\_{1}×z\_{2}=\left(\sqrt{2}+\sqrt{2}i\right)×e^{-i\frac{π}{4}}=$$$$=2e^{i\frac{π}{4}}×e^{-i\frac{π}{4}}=2e^{-i0}=2$$Logo, as raízes quadradas de $z\_{1}×z\_{2}$ são $\sqrt{2}=\sqrt{2}e^{i0}$ e $-\sqrt{2}=\sqrt{2}e^{iπ}$ | **15** |
| **2.2** | $$-i^{11}z^{3}=z\_{3}⇔$$$$⇔-i^{11}z^{3}=27e^{i\frac{π}{6}}⇔$$$$⇔-i^{3}z^{3}=27e^{i\frac{π}{6}}⇔$$$$⇔z^{3}=\frac{27e^{i\frac{π}{6}}}{i}⇔$$$$⇔z^{3}=\frac{27e^{i\frac{π}{6}}}{e^{-i\frac{π}{2}}}⇔$$$$⇔z^{3}=27e^{i\frac{2π}{3}}⇔$$$$⇔z=\sqrt[3]{27}e^{i\left(\frac{2π}{9}+\frac{2kπ}{3}\right)}, k\in \left\{0, 1, 2\right\}⇔$$$$⇔z=3e^{i\frac{2π}{9}} ∨ z=3e^{i\frac{8π}{9}} ∨ z=3e^{i\frac{14π}{9}}$$$$C.S.=\left\{3e^{i\frac{2π}{9}}, 3e^{i\frac{8π}{9}},3e^{i\frac{14π}{9}} \right\}$$ | **15** |

|  |  |  |  |
| --- | --- | --- | --- |
| **3.1** | Consideremos a família de números complexos $z\_{m}=\left(\sqrt{2}m-1\right)+\left(\frac{m^{2}}{5}-1\right)i, m\in R$.$z\_{m}$ é um número real se$$\frac{m^{2}}{5}-1=0⇔m^{2}=5⇔m=-\sqrt{5} ∨ m=\sqrt{5}$$ | **10** | **30** |
| **3.2** | Consideremos a família de números complexos $z\_{m}=\left(\sqrt{2}m-1\right)+\left(\frac{m^{2}}{5}-1\right)i, m\in R$.$z\_{m}$ é um imaginário puro se$$\sqrt{2}m-1=0 ∧ \frac{m^{2}}{5}-1\ne 0⇔m=\frac{\sqrt{2}}{2} ∧ m\ne -\sqrt{5} v m\ne \sqrt{5}⇔$$$$m=\frac{\sqrt{2}}{2}$$ | **10** |
| **3.3** | $$Re\left(z\_{m}\right)=Im\left(z\_{m}\right)⇔\sqrt{2}m-1=\frac{m^{2}}{5}-1⇔$$$$⇔m^{2}-5\sqrt{2}m=0⇔$$$$⇔m\left(m-5\sqrt{2}\right)=0⇔$$$$⇔m=0 ∨m=5\sqrt{2}$$ | **10** |
| **4** | Comecemos por escrever $z\_{0}=-2+2i$ na forma trigonométrica:$$\left|z\_{0}\right|=\sqrt{\left(-2\right)^{2}+2^{2}}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$$Seja $θ$ um argumento de $z\_{0}$:$\tan(θ)=\frac{2}{-2} ∧ θ \in 2.º Quadrante ⇒ θ=\frac{3π}{4}$, por exemplo.Logo, $z\_{0}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}}$.Portanto, as restantes raízes quartas de $z$ são: $$z\_{1}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}+\frac{π}{2}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{5π}{4}}$$$$z\_{2}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}+π}=2\sqrt{2}e^{i\frac{7π}{4}}$$$$z\_{3}=2\sqrt{2}e^{i\frac{3π}{4}+\frac{3π}{2}}=2\sqrt{2}e^{i\frac{9π}{4}}$$ | **15** |

|  |  |  |
| --- | --- | --- |
| **5** | Consideremos os números complexos $z\_{1}=\sqrt{8}+\sqrt{8}i$ e $z\_{2}=e^{i\frac{π}{6}}$.Comecemos por escrever $z\_{1}=\sqrt{8}+\sqrt{8}i$ na forma trigonométrica:$$z\_{1}=4e^{i\frac{π}{4}}$$$$z\_{1}×z\_{2}=4e^{i\frac{π}{4}}×e^{i\frac{π}{6}}=4e^{i\left(\frac{π}{4}+\frac{π}{6}\right)}=4\cos(\frac{5π}{12})+4i\sin(\frac{5π}{12})$$Por outro lado, na forma algébrica:$$z\_{1}×z\_{2}=\left(\sqrt{8}+\sqrt{8}i\right)\left(\cos(\frac{π}{6})+i\sin(\frac{π}{6})\right)=\left(\sqrt{8}+\sqrt{8}i\right)\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)=$$$$=\sqrt{6}+\sqrt{2}i+\sqrt{6}i-\sqrt{2}=\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)+\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)i$$Portanto, igualando as duas expressões, tem-se:$$\left\{\begin{array}{c}4\cos(\frac{5π}{12})=\sqrt{6}-\sqrt{2}\\4\sin(\frac{5π}{12})=\sqrt{6}+\sqrt{2}\end{array}\right.⇔\left\{\begin{array}{c}\cos(\frac{5π}{12})=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}\\\sin(\frac{5π}{12})=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\end{array}\right.$$Logo, o valor exato de $\cos(\frac{5π}{12})$ é $\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}.$ | **20** |
| **6** |  | **20** |