Formulário

DIMENSÕES

Matemática A

O Projeto **Dimensões** de Matemática A destinado ao 12.º ano de escolaridade, do Ensino Secundário, é uma obra coletiva, concebida e criada pelo Departamento de Investigações e Edições Educativas da Santillana, sob a direção de Sílvia Vasconcelos.

EQUIPA TÉCNICA
Chefe de Equipa Técnica: Patrícia Boleto
Modelo Gráfico e Capa: Carla Julião
Ilustrações: Paulo Oliveira
Paginação: Leonor Ferreira
Revisão: Catarina Pereira

EDITORA
Paula Inácio

SANTILLANA

Rua Mário Castelhano, 40 – Queluz de Baixo
2734-502 Barcarena, Portugal

APOIO AO PROFESSOR
Tel.: 214 246 901
apoioaoprofessor@santillana.com

APOIO AO LIVREIRO
Tel.: 214 246 906
apoioaolivreiro@santillana.com

Internet: www.santillana.pt

Cálculo proposicional

Operações com proposições

Dadas duas proposições p e q, tem-se que:

Equivalência

p	q	$p \Leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Negação

p	$\sim p$
V	F
F	V

Lei da dupla negação

$\sim(\sim p) \Leftrightarrow p$

Conjunção

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Disjunção

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Implicação

p	q	$p \Rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Propriedades das operações lógicas

Dadas três proposições p, q e r, tem-se que:

Comutativa

$p \wedge q \Leftrightarrow q \wedge p$ $\qquad$ $p \vee q \Leftrightarrow q \vee p$

Associativa

$(p \wedge q) \wedge r \Leftrightarrow p \wedge (q \wedge r)$

$(p \vee q) \vee r \Leftrightarrow p \vee (q \vee r)$

Existência de elemento neutro

$p \wedge V \Leftrightarrow V \wedge p \Leftrightarrow p$ $\qquad$ $p \vee F \Leftrightarrow F \vee p \Leftrightarrow p$

Existência de elemento absorvente

$p \wedge F \Leftrightarrow F \wedge p \Leftrightarrow F$ $\qquad$ $p \vee V \Leftrightarrow V \vee p \Leftrightarrow V$

Distributividade da conjunção em relação à disjunção

$p \wedge (q \vee r) \Leftrightarrow (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Distributividade da disjunção em relação à conjunção

$p \vee (q \wedge r) \Leftrightarrow (p \vee q) \wedge (p \vee r)$

Primeiras Leis de De Morgan

$\sim(p \wedge q) \Leftrightarrow \sim p \vee \sim q \quad \sim(p \vee q) \Leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$

Propriedades da implicação

Transitividade

$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow r) \Rightarrow (p \Rightarrow r)$

Relação com a disjunção e negação

$p \Rightarrow q \Leftrightarrow \sim p \vee q$

Negação

$\sim(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow p \wedge \sim q$

Implicação contrarrecíproca

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow (\sim q \Rightarrow \sim p)$

Condições e conjuntos

Quantificador universal

$\forall x, p(x) \Leftrightarrow V$ se, e somente se, $p(x)$ for universal.

Quantificador existencial

$\exists x \colon p(x) \Leftrightarrow V$ se, e somente se, $p(x)$ for possível.

Segundas leis de De Morgan

$\sim(\forall x, p(x)) \Leftrightarrow \exists x \colon \sim p(x)$

$\sim(\exists x \colon p(x)) \Leftrightarrow \forall x, \sim p(x)$

Operações com conjuntos

Dados os conjuntos $A = \{x \colon p(x)\}$ e $B = \{x \colon q(x)\}$ definidos por $p(x)$ e $q(x)$, tem-se:

Interseção

$A \cap B = \{x \colon p(x) \wedge q(x)\}$

União

$A \cup B = \{x \colon p(x) \vee q(x)\}$

Diferença

$A \backslash B = \{x \colon p(x) \wedge \sim q(x)\}$

$A \backslash B = A \cap \overline{B}$

Complementar

$\overline{A} = \{x \colon \sim p(x)\}$

Propriedades das operações com conjuntos

Dados A, B e C subconjuntos de U, tem-se:

Comutativa

$A \cap B = B \cap A$ $\qquad$ $A \cup B = B \cup A$

Associativa

$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$

$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$

Existência de elemento neutro

$A \cap U = A$ $\qquad$ $A \cup \varnothing = A$

Existência de elemento absorvente

$A \cap \varnothing = \varnothing$ $\qquad$ $A \cup U = U$

Propriedade distributiva da interseção em relação à união

$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Propriedade distributiva da união em relação à interseção

$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$

Inclusão de conjuntos

$A \subset B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A \cup B = B$

Leis de De Morgan para conjuntos

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ $\qquad$ $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

Produto cartesiano

Dados conjuntos A e B, o produto cartesiano de A por B é o conjunto definido por:

$A \times B = \{(x, y): x \in A \wedge y \in B\}$

Propriedades do produto cartesiano

Dados conjuntos A, B e C, tem-se:

Propriedade distributiva do produto cartesiano em relação à união de conjuntos

$A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$

$(B \cup C) \times A = (B \times A) \cup (C \times A)$

Geometria Analítica no plano

Sejam $A(x_A, y_A)$ e $B(x_B, y_B)$ dois pontos de um plano:

Coordenadas do ponto médio de [*AB*]

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}\right)$$

Distância entre dois pontos

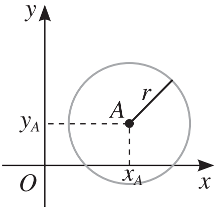
$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$$

Equação da mediatriz do segmento de reta [*AB*]

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 = (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2$$

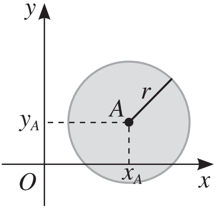
Equação reduzida da circunferência de centro *A* e raio *r*

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 = r^2$$



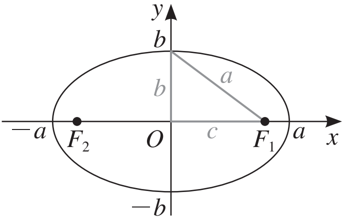
Inequação reduzida do círculo de centro *A* e raio *r*

$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 \leqslant r^2$



Equação reduzida da elipse centrada na origem:

- Focos no eixo Ox, $F_1(c, 0)$ e $F_2(-c, 0)$ e eixo maior $2a$



$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1\,,\ b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$2a$ — eixo maior;

$2b$ — eixo menor;

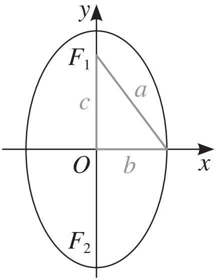
$2c$ — distância focal.

- Focos no eixo Oy, $F_1(0, c)$ e $F_2(0, -c)$ e eixo maior $2a$

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1 ,$$

$$b = \sqrt{a^2 - c^2}$$

$2a$ — eixo maior;
$2b$ — eixo menor;
$2c$ — distância focal.



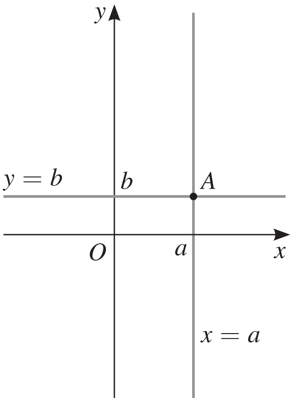
Retas paralelas aos eixos

- **Equação da reta paralela a *Ox* que contém o ponto *A*(*a*, *b*) :**

$$y = b$$

- **Equação reduzida da reta paralela a *Oy* que contém o ponto *A*(*a*, *b*) :**

$$x = a$$



Geometria Analítica no espaço

Sejam $A(x_A, y_A, z_A)$ e $B(x_B, y_B, z_B)$ dois pontos do espaço:

Coordenadas do ponto médio de [*AB*]

$$\left(\frac{x_A + x_B}{2}, \frac{y_A + y_B}{2}, \frac{z_A + z_B}{2}\right)$$

Distância entre dois pontos

$$d(A, B) = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

Equação do plano mediador do segmento de reta [*AB*]

$$(x - x_B)^2 + (y - y_B)^2 + (z - z_B)^2 =$$
$$= (x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2$$

Equação reduzida da superfície esférica de centro *A* e raio *r*

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 = r^2$$

Inequação reduzida da esfera de centro *A* e raio *r*

$$(x - x_A)^2 + (y - y_A)^2 + (z - z_A)^2 \leqslant r^2$$

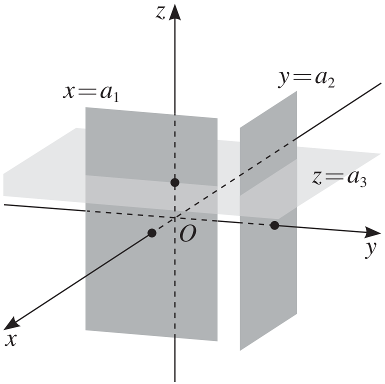
Planos paralelos aos planos definidos pelos eixos coordenados

Equação de um plano que contém o ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e é paralelo ao plano:

xOy: $z = a_3$

xOz: $y = a_2$

yOz: $x = a_1$



Retas paralelas aos eixos coordenados

Sistema de equações de uma reta que contém o ponto $A(a_1, a_2, a_3)$ e é paralela ao eixo:

Ox: $y = a_2 \wedge z = a_3$

Oy: $x = a_1 \wedge z = a_3$

Oz: $x = a_1 \wedge y = a_2$

Cálculo vetorial no plano

Vetor como diferença de dois pontos

$$\overrightarrow{AB} = B - A(x_B - x_A, y_B - y_A)$$

Condição de colinearidade de dois vetores

Os vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$, $\vec{v} \neq \vec{0}$ são colineares se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$u_1 = kv_1 \wedge u_2 = kv_2$$

ou, dito de outro modo, as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são diretamente proporcionais.

Norma de um vetor

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2}$$

Equações da reta que contém o ponto $A(x_A, y_A)$ e a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2)$

Equação vetorial

$(x, y) = (x_A, y_A) + k(u_1, u_2), k \in \mathbb{R}$

Sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_A + ku_1 \\ y = y_A + ku_2 \end{cases}, k \in \mathbb{R}$$

Equação reduzida

$$y = mx + b, m = \frac{u_2}{u_1} \text{ e } b = y_A - mx_A$$

Produto escalar de dois vetores

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos\left(\vec{u} \hat{\ } \vec{v}\right)$$

Dados $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2$$

Condição de perpendicularidade de dois vetores

Dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2)$ e $\vec{v}(v_1, v_2)$

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 = 0$$

Declives de retas perpendiculares

Duas retas r e s de declives m e m', respetivamente, são perpendiculares se, e somente se, $mm' = -1$.

Cálculo vetorial no espaço

Vetor como diferença de dois pontos

$$\overrightarrow{AB} = B - A(x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A)$$

Condição de colinearidade de dois vetores:

Os vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, $\vec{v} \neq 0$ são colineares se, e somente se, existe $k \in \mathbb{R}$, tal que

$$u_1 = kv_1 \wedge u_2 = kv_2 \wedge u_3 = kv_3$$

ou, dito de outro modo, as coordenadas de $\vec{u}$ e $\vec{v}$ são diretamente proporcionais.

Norma de um vetor

$$\|\vec{u}\| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$$

Equações da reta que contém o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ e a direção do vetor $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$

Equação vetorial

$$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + k(u_1, u_2, u_3), k \in \mathbb{R}$$

Sistema de equações paramétricas

$$\begin{cases} x = x_A + ku_1 \\ y = y_A + ku_2, k \in \mathbb{R} \\ z = z_A + ku_3 \end{cases}$$

Produto escalar de dois vetores

Dados $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3$$

Condição de perpendicularidade de dois vetores

Dados vetores $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$:

$$\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$$

Equações de planos no espaço

Uma **equação cartesiana** do plano normal ao vetor $\vec{u}(a, b, c)$ que contém o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ é

$$ax + by + cz + d = 0$$

em que $d = -ax_A - by_A - cz_A$.

Dados um plano α , o ponto $A(x_A, y_A, z_A)$ de α e dois vetores, $\vec{u}(u_1, u_2, u_3)$ e $\vec{v}(v_1, v_2, v_3)$, não colineares paralelos a α :

Uma **equação vetorial do plano** α é
$(x, y, z) = (x_A, y_A, z_A) + s(u_1, u_2, u_3) +$
$+ t(v_1, v_2, v_3), s, t \in \mathbb{R}$

Um **sistema de equações paramétricas do plano** α é

$$\begin{cases} x = x_A + su_1 + tv_1 \\ y = y_A + su_2 + tv_2, s, t \in \mathbb{R} \\ z = z_A + su_3 + tv_3 \end{cases}$$

Somatórios

Dados $p \in \mathbb{N}$ e uma sequência de números reais $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$, tem-se que:

$$\sum_{i=1}^{p} x_i = x_1 + x_2 + \ldots + x_p$$

Propriedades dos somatórios

Dados $p \in \mathbb{N}$, $\lambda \in \mathbb{R}$, um número natural n , tal que $n < p$ e sequências de números reais $(x_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$ e $(y_i)_{1 \leqslant i \leqslant p}$, tem-se que:

Associativa

$$\sum_{k=1}^{p} x_k = \sum_{k=1}^{n} x_k + \sum_{k=n+1}^{p} x_k$$

Homogénea

$$\sum_{i=1}^{p} (\lambda x_i) = \lambda \sum_{i=1}^{p} x_i$$

Aditiva

$$\sum_{i=1}^{p} (x_i + y_i) = \sum_{i=1}^{p} x_i + \sum_{i=1}^{p} y_i$$

Amostras de dados univariados

Sejam $n \in \mathbb{N}$ e uma amostra $\underset{\sim}{x} = (x_1, x_2, \dots , x_n)$.

Média

Dados não agrupados

$$\overline{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n}$$

Dados agrupados

$$\overline{x} = \frac{\sum_{j=1}^{m} n_j \tilde{x}_j}{n}$$

$\tilde{x}_1$, $\tilde{x}_2$, … , $\tilde{x}_m$ são os m elementos de $\tilde{x}$ e n_1 , n_2 , … , n_m as respetivas frequências absolutas $\left(\sum_{j=1}^{m} n_j = n \right)$.

Propriedades da média

A amostra $\underset{\sim}{y} = (ax_1 + h, ax_2 + h, \dots , ax_n + h)$ tem média: $\overline{y} = a\overline{x} + h \ (a, h \in \mathbb{R})$.

Desvios em relação à média

$$d_i = x_i - \overline{x}, i \in \{1, 2, \dots , n\}$$

Propriedades dos desvios em relação à média

Dados não agrupados

$$\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x}) = 0$$

Dados agrupados

$$\sum_{j=1}^{m} n_j(\tilde{x}_j - \overline{x}) = 0$$

Soma dos quadrados dos desvios

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})^2$$

Dados não agrupados

$$SS_x = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - n\overline{x}^2$$

Dados agrupados

$$SS_x = \sum_{j=1}^{m} n_j(\tilde{x}_j - \overline{x})^2$$

Propriedades da soma dos quadrados dos desvios

Se $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (resp. $\underset{\sim}{y} = a\underset{\sim}{x}$), então,
$SS_y = SS_x$ (resp. $SS_y = a^2\, SS_x$) $(a, h \in \mathbb{R})$

Variância

$$S_x^2 = \frac{SS_x}{n-1}$$

Desvio-padrão

$$S_x = \sqrt{\frac{SS_x}{n-1}}$$

Propriedades do desvio-padrão

- $S_x = 0$ se, e somente se, $x_1 = x_2 = \dots = x_n$.
- $\underset{\sim}{y} = \underset{\sim}{x} + h$ (respetivamente $\underset{\sim}{y} = \alpha\underset{\sim}{x}$), então,
  $S_x = S_y$ (respetivamente, $S_y = |\alpha| S_x$) $(\alpha, h \in \mathbb{R})$

Percentis

Percentil de ordem k, P_k, é o valor máximo da amostra se $k = 100$, a média dos elementos de ordem $\frac{kn}{100}$ e $\frac{kn}{100} + 1$ na amostra ordenada se $k \neq 100$ e $\frac{kn}{100}$ for inteiro, e, nos restantes casos, o elemento de ordem $\left[\frac{kn}{100}\right] + 1$ na amostra ordenada.

Percentis para dados agrupados em classes

Dados números naturais m, n e k, $k \leqslant 100$, uma sequência crescente de números reais $(a_1, a_2, \ldots, a_m)$ e um conjunto de dados quantitativos organizados nos intervalos de classe $[a_i, a_{i+1}[$, que se supõem de igual amplitude $h > 0$, tem-se P_k, o número real x, tal que

$$\sum_{i=1}^{L-1}(a_{i+1} - a_i)n_i + (x - a_L)n_L = \frac{k}{100}\sum_{i=1}^{m}(a_{i+1} - a_i)n_i$$

isto é, tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i + (x - a_L)n_L = \frac{khn}{100}$,

em que n_i é a frequência absoluta do intervalo de classe $[a_i, a_{i+1}[$ e L é o maior número natural, tal que $\sum_{i=1}^{L-1} n_i \leqslant \frac{kn}{100}$.

Amostras de dados bivariados

Seja $\underset{\sim}{(x, y)}$ a amostra bivariada das variáveis estatísticas x e y dada por $((x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n))$.

Regressão linear

- **Desvio vertical do ponto $P_i(x_i, y_i)$, $1 \leqslant i \leqslant n$**

$$e_i = y_i - ax_i - b \; (a, b \in \mathbb{R})$$

- **Reta dos mínimos quadrados**

$y = ax + b$, com $a = \dfrac{\sum_{i=1}^{n} x_i y_i - n\overline{x}\,\overline{y}}{SS_x}$
e $b = \overline{y} - a\overline{x}$.

- **Propriedade**

$$\sum_{i=1}^{n} e_i = 0 \Leftrightarrow \overline{y} - a\overline{x} - b = 0$$

- **Coeficiente de correlação linear**

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{SS_x SS_y}} \quad \text{ou} \quad r = \frac{SS_x}{SS_y}$$

Factos elementares da combinatória

Dados dois conjuntos A e B,

- Se $A \cap B = \emptyset$, então, $\#(A \cup B) = \#A + \#B$
- Se $\#A \in \mathbb{N}$ e $\#B \in \mathbb{N}$, então, $\#(A \times B) = \#A \times \#B$

Dado um conjunto A finito com $n \in \mathbb{N}$ elementos, existem:

- ${}^nA'_p = n^p$ **arranjos com repetições** (sequências ordenadas de p elementos de A, repetindo elementos ou não — extrações com reposição);
- ${}^nA_p = \dfrac{n!}{(n-p)!}$ **arranjos sem repetição** (sequências ordenadas de p elementos de A, sem repetição de elementos — extrações sem reposição);
- $P_n = n!$ **permutações de n** (formas distintas de ordenar os n elementos de A)
- ${}^nC_p = \dfrac{{}^nA_p}{p!} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$ combinações distintas de p elementos de A (número de subconjuntos de A com $p \in \mathbb{N}, p \leqslant n$, elementos);
- $\#\mathcal{P}(A) = 2^n$ subconjuntos de A
  $\mathcal{P}(A)$ — conjunto das partes de A.

Triângulo de Pascal — Propriedades

Dados $n, p \in \mathbb{N}, n \geqslant p$:

$${}^nC_p = {}^nC_{n-p}$$

$$\sum_{k=0}^{n} {}^nC_k = 2^n$$

$${}^{n+1}C_{p+1} = {}^nC_{p+1} + {}^nC_p$$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
 & & & & & 1 & & & & & \\
 & & & & 1 & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 2 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & & \\
 & 1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 & \\
1 & & 5 & & 10 & & 10 & & 5 & & 1 \\
\cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\
{}^nC_0 & & {}^nC_1 & & {}^nC_2 & \cdots & {}^nC_{n-2} & & {}^nC_{n-1} & & {}^nC_n
\end{array}$$

Binómio de Newton

$$(a+b)^n = a^n + {}^nC_1\, a^{n-1}\, b + \ldots +$$
$$+ {}^nC_{n-1}\, ab^{n-1} + b^n$$

Probabilidades

Dados um conjunto finito E e uma probabilidade no conjunto $\mathcal{P}(E)$ e dois subconjuntos A e B de E, tem-se:

- $P(E) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant P(B)$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(\varnothing) = 0$
- $P(A \backslash B) = P(A \cap \overline{B}) = P(A) - P(A \cap B)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

Regra de Laplace

Dada uma experiência aleatória cujos casos possíveis sejam equiprováveis e finitos, define-se probabilidade de um acontecimento A o quociente entre o número de casos favoráveis a A $(\#A)$ e o número de casos possíveis $(\#E)$:

$$P(A) = \frac{\#A}{\#E}$$

Probabilidade condicionada

Dados uma probabilidade P e dois acontecimentos A e B, com $P(B) \neq 0$, tem-se:

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Regra do produto

$P(A \cap B) = P(A)P(B|A)$ e $P(A \cap B) =$
$= P(B)P(A|B)$

Acontecimentos independentes

Dois acontecimentos A e B são independentes se, e somente se, $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Teorema da probabilidade total

Seja E um conjunto finito, tal que:
$E = B_1 \cup B_2 \cup \ldots \cup B_n$, em que
$B_i \cap B_j = \varnothing$, $A \subset E$ e P uma probabilidade:

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i)P(A|B_i)$$

Potências

Potências de expoente inteiro

$$a^n = \underbrace{a \times a \times \ldots \times a}_{n \text{ fatores}} \ (n \in \mathbb{N}) \ ; \ a^0 = 1 \ (a \in \mathbb{R} \setminus \{0\})$$

Potências de expoente racional

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} \quad (m \in \mathbb{N}_0, n \in \mathbb{N}_2, a \in \mathbb{R}^+)$$

Propriedades das potências

Dados $x, y \in \mathbb{R}, a, b > 0$, tem-se:

- $a^x \times a^y = a^{x+y}$
- $(ab)^x = a^x \times b^x$
- $\dfrac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$
- $(a^x)^y = a^{xy}$
- $\left(\dfrac{a}{b}\right)^x = \dfrac{a^x}{b^x}$
- $a^{-x} = \dfrac{1}{a^x}$

Radicais

Propriedades dos radicais

Sejam $a, b \in \mathbb{R}_0^+$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ par (resp. $a, b \in \mathbb{R}$, $m \in \mathbb{N}$ e $n \in \mathbb{N}$ ímpar), tem-se:

- $\sqrt[n]{a} \times \sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$
- $\sqrt[n]{a^n b} = a\sqrt[n]{b}$
- $\left(\sqrt[n]{a}\right)^m = \sqrt[n]{a^m}$
- $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} \ (b \neq 0)$

Sucessões monótonas

- (u_n) é crescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} > u_n$
- (u_n) é decrescente $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} < u_n$
- (u_n) é crescente em sentido lato $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \geqslant u_n$
- (u_n) é decrescente em sentido lato $\Leftrightarrow$ $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} \leqslant u_n$
- (u_n) é constante $\Leftrightarrow \forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = u_n$

Progressões aritméticas

(u_n) é progressão aritmética de razão r e primeiro termo a:

$u_1 = a \wedge u_{n+1} = u_n + r, \forall n \in \mathbb{N}$

Termo geral:

$u_n = u_1 + (n-1)r$

Soma dos N primeiros termos:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = \frac{u_1 + u_N}{2} \times N$$

Progressões geométricas

(u_n) é progressão geométrica de razão r e primeiro termo a:

$u_1 = a \wedge u_{n+1} = u_n \times r, \forall n \in \mathbb{N}$

Termo geral:

$u_n = u_1\, r^{n-1}$

Soma dos N primeiros termos:

$$\sum_{i=1}^{N} u_i = u_1 \frac{1 - r^N}{1 - r}$$

Sucessão convergente

$\lim u_n = l$ se, para todo o número real $\delta > 0$, existir uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que

$$\forall\, n \in \mathbb{N}, n \geqslant p \Rightarrow |u_n - l| < \delta$$

Limites infinitos

Uma sucessão (u_n):

- tem limite $+\infty$, quando, para todo o $L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p \Rightarrow u_n > L$
- tem limite $-\infty$, quando, para todo o $L > 0$, existe uma ordem $p \in \mathbb{N}$, tal que $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $n \geqslant p \Rightarrow u_n < -L$

Álgebra de limites

(u_n) e (v_n) convergentes

- $\lim(u_n + v_n) = \lim u_n + \lim v_n$
- $\lim(u_n v_n) = \lim u_n \times \lim v_n$
- $\lim(k u_n) = k \lim u_n \ (k \in \mathbb{R})$
- $\lim\left(\dfrac{u_n}{v_n}\right) = \dfrac{\lim u_n}{\lim v_n}$, se $\forall\, n \in \mathbb{N}$, $v_n \neq 0$ e $\lim v_n \neq 0$
- $\lim(u_n)^r = (\lim u_n)^r$ se $r \in \mathbb{N}$, ou se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 0$ e $r \in \mathbb{Q}^+$, ou ainda se $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Álgebra de limites infinitos/nulos

$+\infty + (+\infty) = +\infty$

$-\infty + (-\infty) = -\infty$

$+\infty \times (+\infty) = +\infty$

$-\infty \times (-\infty) = +\infty$

$+\infty \times (-\infty) = -\infty$

$\frac{1}{+\infty} = 0\,;\ \frac{1}{-\infty} = 0$

$l \times (-\infty) = -\infty$ se $l > 0$

$l \times (-\infty) = +\infty$ se $l < 0$

$l \times (+\infty) = +\infty$ se $l > 0$

$l \times (+\infty) = -\infty$ se $l < 0$

$\frac{1}{0^+} = +\infty\,;\ \frac{1}{0^-} = -\infty$

Indeterminações

$\infty - \infty \ \Big|\ 0 \times \infty \ \Big|\ \frac{\infty}{\infty} \ \Big|\ \frac{0}{0}$

Propriedade

Dadas duas sucessões (u_n) e (v_n), se (u_n) é limitada e $\lim v_n = 0$, então, $\lim(u_n\, v_n) = 0$.

Teoremas de comparação

Dadas sucessões (u_n) e (v_n), se existe uma ordem a partir da qual $u_n \leqslant v_n$ e:

- $\lim u_n = +\infty$, então, $\lim v_n = +\infty$;
- $\lim v_n = -\infty$, então, $\lim u_n = -\infty$.

Teorema das sucessões enquadradas

Dadas sucessões (u_n), (v_n) e (w_n),
se (u_n) e (v_n) são convergentes,
$\lim u_n = \lim v_n = l$ e existe $p \in \mathbb{N}$,
tal que, para todo o $n > p$,

$$u_n \leqslant w_n \leqslant v_n,$$

então, (w_n) é convergente e $\lim w_n = l$.

Limites notáveis

- Seja $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$

$$a > 1 \Rightarrow \lim a^n = +\infty$$
$$a < 1 \Rightarrow \lim a^n = 0$$

- Seja $a \in \mathbb{R}^+$

$$\lim \sqrt[n]{a} = 1$$

- Seja $x \in \mathbb{R}$

$$\lim \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = e^x$$

Generalidades acerca de funções

Uma função f denomina-se **injetiva** se, e somente se, para quaisquer $x_1, x_2 \in D_f$, $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$.

Uma função $f\colon D_f \to B$ denomina-se **sobrejetiva** se, e somente se, para todo o $y \in B$ existe $x \in A$, tal que

$$y = f(x)$$

Uma função f denomina-se **bijetiva** se, e somente se, for injetiva e sobrejetiva.

Função composta

$D_{g \circ f} = \{x\colon x \in D_f \wedge f(x) \in D_g\}$,

$g \circ f(x) = g\big(f(x)\big)$

Função inversa

$f^{-1}(y) = x \Leftrightarrow f(x) = y$, $\forall (x, y) \in D_f \times D'_f$

Paridade

Função par

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge$
$\wedge\ f(-x) = f(x)$

Função ímpar

$\forall x \in D_f, -x \in D_f \wedge$
$\wedge\ f(-x) = -f(x)$

Propriedades geométricas dos gráficos

Translações

$g(x) = f(x - a) + b$ — **translação de vetor** $\vec{u}(a, b)$

Contrações/Dilatações

$h(x) = af(x)$ — **contração vertical** se $0 < a < 1$, **dilatação vertical** se $a > 1$. Coeficiente a

$t(x) = f(ax)$ — **contração horizontal** se $a > 1$, **dilatação horizontal** se $0 < a < 1$.

Coeficiente $\frac{1}{a}$

Reflexões

$g(x) = f(-x)$ — **reflexão de eixo** Oy

$g(x) = -f(x)$ — **reflexão de eixo** Ox

Função periódica

A função f é p**-periódica** se, e somente se:

$\forall x \in D_f,\ x + p \in D_f \land f(x + p) = f(x)$

Monotonia

A função f é **crescente** em $A \subset D_f$ se, e somente se,
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

A função f é **decrescente** em $A \subset D_f$ se, e somente se,
$\forall x_1, x_2 \in \mathbb{R}, \; x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Operações com funções

Dadas funções f e g de domínios D_f e D_g, respetivamente:

- As funções $f + g$, $f - g$ e $f \times g$ têm domínio $D_f \cap D_g$ e são definidas, respetivamente, por:
  $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$,
  $(f - g)(x) = f(x) - g(x)$ e
  $(fg)(x) = f(x)g(x)$
- A função $\dfrac{f}{g}$ tem domínio $D_f \cap D_g \backslash \{x\colon g(x) = 0\}$
- A função definida por $h(x) = \sqrt[b]{f(x)}$ tem domínio $D_h = \{x \in D_f\colon f(x) \geqslant 0\}$, se b par e $D_h = D_f$, se b ímpar.

Equações com radicais quadráticos

$$\sqrt{f(x)} = g(x) \Rightarrow f(x) = [g(x)]^2$$

Nota: Apenas são solução da equação $\sqrt{f(x)} = g(x)$ as soluções de $f(x) = [g(x)]^2$ que transformam a condição $\sqrt{f(x)} = g(x)$ numa proposição verdadeira.

Limite de uma função (Heine)

Seja a ponto aderente a D_f e $b \in \mathbb{R}$

$\lim\limits_{x \to a} f(x) = b$ se, e somente se, para qualquer sucessão (x_n), tal que $\forall n \in \mathbb{N}$, $x_n \in D_f$ se $x_n \to a$, então, $f(x_n) \to b$.

Álgebra de limites de funções

$$\lim_{x \to a} (f \pm g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \pm \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} (f \times g)(x) = \lim_{x \to a} f(x) \times \lim_{x \to a} g(x)$$

$$\lim_{x \to a} \left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{\lim\limits_{x \to a} f(x)}{\lim\limits_{x \to a} g(x)}$$

$$\lim_{x \to a} [f(x)]^r = \left[\lim_{x \to a} f(x)\right]^r, \ r \in \mathbb{Q}$$

Teorema sobre funções limitadas

Se $\lim_{x \to a} f(x) = 0$ e g é limitada, então:

$$\lim_{x \to a} [f(x)g(x)] = 0$$

Teorema das funções enquadradas

Se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} h(x) = l$ e $g(x) \leqslant f(x) \leqslant h(x)$,
então, $\lim_{x \to a} f(x) = l$.

Função contínua num ponto

A função f é contínua em $a \in D_f$ se,
e somente se, existe $\lim_{x \to a} f(x)$.

Propriedades

Se f e g são funções contínuas, então, $f + g$,
$f - g$, $f \times g$, $\dfrac{f}{g}$ e f^r, $r \in \mathbb{Q}$ são também
contínuas nos respetivos domínios.

As funções polinomiais e as funções racionais são contínuas.

Teorema de Bolzano-Cauchy

Se uma função f é contínua num intervalo $[a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$ pertence ao intervalo de extremos $f(a)$ e $f(b)$, então, existe $c \in [a, b]$, tal que $f(c) = k$.

Teorema de Weierstrass

Uma função f r. v. r. contínua num intervalo $[a, b]$ admite um máximo e um mínimo absolutos.

Assíntotas ao gráfico de uma função

Assíntotas verticais

A reta de equação $x = a$ é assíntota ao gráfico de f, se $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = +\infty$, ou $\lim\limits_{x \to a^+} f(x) = -\infty$, ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = +\infty$ ou $\lim\limits_{x \to a^-} f(x) = -\infty$.

Assíntotas não verticais

Se $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{f(x)}{x} = m \in \mathbb{R}\right)$ e $\lim\limits_{x \to +\infty} [f(x) - mx] = b \in \mathbb{R}$ $\left(\lim\limits_{x \to -\infty} [f(x) - mx] = b \in \mathbb{R}\right)$, a reta de equação $y = mx + b$ é assíntota ao gráfico de f em $+\infty$ $(-\infty)$.

Taxa média de variação de f entre a e b, a, $b \in D_f$

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

Derivada de f em $a \in D_f$

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a} \,;$$

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Equação reduzida da reta tangente ao gráfico de f em $A(a, f(a))$

$$y = m(x - a) + f(a)\,,\ m = f'(a)$$

Regras de derivação

$$(u + v)' = u' + v'$$

$$(uv)' = u'v + v'u$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}$$

$$(u^p)' = pu^{p-1}u', p \in \mathbb{R}$$

$$(f \circ g)'(x) = f'\big(g(x)\big)\, g'(x)$$

Derivadas e monotonia

Seja f uma função diferenciável num intervalo $I \subset D_f$

- Se $\forall x \in I,\ f'(x) \geqslant 0$, então, f é crescente em I.
- Se $\forall x \in I,\ f'(x) \leqslant 0$, então, f é decrescente em I.

Derivada de segunda ordem

$$f''(a) = (f')'(a)$$

Teste da segunda derivada para extremos relativos

- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) > 0$, então, f admite um mínimo em a.
- Se $f'(a) = 0$ e $f''(a) < 0$, então, f admite um máximo em a.

Pontos de inflexão e sentido das concavidades

Seja f duas vezes diferenciável num intervalo I

- Se, para todo o $x \in I$, $f''(x) > 0$ $\left(f''(x) < 0\right)$, o gráfico de f tem concavidade voltada para cima (para baixo) em I.
- Se o gráfico de f tem um ponto de inflexão no ponto de abcissa $c \in I$, então, $f''(c) = 0$.

Funções exponenciais

Dado um número $a \in \mathbb{R}^+$, a função definida em $\mathbb{R}$ por $f(x) = a^x$ designa-se por função exponencial de base a.

Propriedades

- $D_f = \mathbb{R}$ e $D'_f = \mathbb{R}^+$
- É contínua; $\forall x_0 \in \mathbb{R}$, $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$

$a > 1$	$0 < a < 1$
f é crescente $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = 0$	f é decrescente $\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = 0$ $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
Limites notáveis	
$\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{e^h - 1}{h} = 1$	$\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^p} = +\infty, p \in \mathbb{R}$
Derivadas	
$(e^x)' = e^x$ $\left(e^{u(x)}\right)' = u'(x)\, e^{u(x)}$	$(a^x)' = \ln a\, a^x$ $\left(a^{u(x)}\right)' = \ln a\, u'(x)\, a^{u(x)}$

Funções logarítmicas

Dado um número $a \in \mathbb{R}^+ \backslash \{1\}$, a função $f: \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = \log_a x$ designa-se por «logaritmo de base a» e tem-se que $y = \log_a x \Leftrightarrow a^y = x$, logo, $\forall x \in \mathbb{R}^+$, $a^{\log_a x} = x$ e $\forall x \in \mathbb{R}$, $\log_a (a^x) = x$

Propriedades

- $D_f = \mathbb{R}^+$ e $D'_f = \mathbb{R}$.
- É contínua: $\forall x_0 \in \mathbb{R}^+$, $\lim\limits_{x \to x_0} \log_a(x) = \log_a(x_0)$.
- $\log_a x = 0 \Leftrightarrow x = a^0 \Leftrightarrow x = 1$
- A reta de equação $x = 0$ é a única assíntota vertical ao gráfico de f.

$a > 1$	$0 < a < 1$
$\log_a x < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in]0, 1[$ $\log_a x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$ f é crescente $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = -\infty$	$\log_a x < 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in]1, +\infty[$ $\log_a x > 0 \Leftrightarrow$ $\Leftrightarrow x \in]0, 1[$ f é decrescente $\lim\limits_{x \to 0} \log_a x = +\infty$ $\lim\limits_{x \to +\infty} \log_a x = -\infty$

Propriedades algébricas

Dados $a \in \mathbb{R}^+ \setminus \{1\}$ e $x, y \in \mathbb{R}^+$,

$$\log_a(xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$\log_a\left(\frac{1}{x}\right) = -\log_a x$$

$$\log_a\left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$\log_a(x^k) = k \log_a x$$

$$\log_a(x) = \frac{\log_b x}{\log_b a} \text{ (Mudança de base)}$$

Limite notável

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0$$

Derivadas

$$\log_a' x = \frac{1}{\ln a \, x}$$

$$\ln' x = \frac{1}{x}$$

$$\log_a'(u(x)) = \frac{u'(x)}{\ln a \, u(x)}$$

$$\ln'(u(x)) = \frac{u'(x)}{u(x)}$$

Modelos exponenciais

Dado $k \in \mathbb{R}$, as funções definidas por $f(x) = ce^{kx}$, em que $c \in \mathbb{R}$, são soluções em $\mathbb{R}$ de $f'(x) = kf(x)$ e todas as soluções da equação são desta forma.

Razões trigonométricas de um ângulo agudo

Dado um triângulo $[ABC]$ retângulo em C, tem-se:

$$\sin\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AB}}$$

$$\cos\alpha = \frac{\overline{AC}}{\overline{AB}}$$

$$\tan\alpha = \frac{\overline{BC}}{\overline{AC}}$$

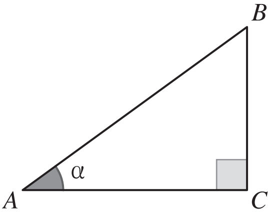


Tabela trigonométrica

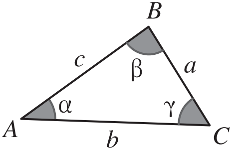
x	$30°\left(\frac{\pi}{6}\right)$	$45°\left(\frac{\pi}{4}\right)$	$60°\left(\frac{\pi}{3}\right)$
$\sin x$	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
$\cos x$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\tan x$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Seno e cosseno de um ângulo convexo

Para qualquer triângulo $[ABC]$, tem-se:

Lei dos senos

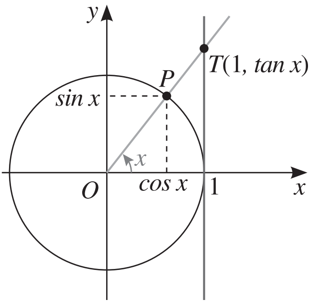
$$\frac{\sin\alpha}{a} = \frac{\sin\beta}{b} = \frac{\sin\gamma}{c}$$



Teorema de Carnot

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\alpha$$

Razões trigonométricas do ângulo orientado



Fórmulas trigonométricas

Fórmula fundamental da trigonometria

$\forall\, x \in \mathbb{R}\,,\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1$

e

$\forall x \in \mathbb{R}\backslash\{x\colon x = \frac{\pi}{2} + k\pi,\, k \in \mathbb{Z}\}\,,$

$$\tan^2 x + 1 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

Fórmulas de redução ao primeiro quadrante

Para todo o $x \in \mathbb{R}$, tem-se:

$\sin(-x) = -\sin x\,;\quad \cos(-x) = \cos x$

$\sin(x + \pi) = -\sin x\,;\quad \cos(x + \pi) = -\cos x$

$\sin(x - \pi) = -\sin x\,;\quad \cos(x - \pi) = -\cos x$

$\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos x\,;\quad \cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin x$

$\sin\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = -\cos x\,;\quad \cos\left(x - \frac{\pi}{2}\right) = \sin x$

Fórmulas da soma e diferença

Para todos os $x, y \in \mathbb{R}$,

$\cos(x - y) = \cos x \cos y + \sin x \sin y$

$\cos(x + y) = \cos x \cos y - \sin x \sin y$

$\sin(x - y) = \sin x \cos y - \cos x \sin y$

$\sin(x + y) = \sin x \cos y + \cos x \sin y$

Fórmulas da duplicação

Para todo o $x \in \mathbb{R}$,

$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

$\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

Funções trigonométricas

	Função seno	Função cosseno
D	$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$
D'	$[-1, 1]$	$[-1, 1]$
Período fundamental	2π	2π
Zeros	$k\pi, k \in \mathbb{Z}$	$\frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Extremos relativos	Máximo 1 ; para $x = \frac{\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$ Mínimo -1 ; para $x = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$	Máximo 1 ; para $x = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$ Mínimo -1 ; para $x = \pi + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$
Paridade	Ímpar	Par

	Função tangente
D	$\mathbb{R} \backslash \left\{x: x = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}\right\}$
D'	$\mathbb{R}$
Período fundamental	π
Zeros	$k\pi, k \in \mathbb{Z}$
Extremos relativos	Não tem extremos
Paridade	Ímpar

Funções trigonométricas inversas

Função arco-seno

Domínio: $[-1, 1]$; Contradomínio: $\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$

$\arcsin x = y \Leftrightarrow \sin y = x$

para $y \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]$ e $x \in [-1, 1]$.

Função arco-cosseno

Domínio: $[-1, 1]$; Contradomínio: $[0, \pi]$

$\arccos x = y \Leftrightarrow \cos y = x$

para $y \in [0, \pi]$ e $x \in [-1, 1]$.

Função arco-tangente

Domínio: $\mathbb{R}$; Contradomínio: $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

$\arctan x = y \Leftrightarrow \tan y = x$

para $y \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ e $x \in \mathbb{R}$.

Equações trigonométricas

$\sin x = \sin \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + 2k\pi \vee$

$\vee\ x = \pi - \alpha + 2k\pi,\ k \in \mathbb{Z}$

$\cos x = \cos \alpha \Leftrightarrow x = \pm\alpha + 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$

$\tan x = \tan \alpha \Leftrightarrow x = \alpha + k\pi, k \in \mathbb{Z}$

Limite notável

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

Derivada das funções trigonométricas

$(\sin(u))' = u' \cos u$

$(\cos(u))' = -u' \sin u$

$(\tan(u))' = \dfrac{u'}{\cos^2 u} = u'(1 + \tan(u))$

Movimentos harmónicos

Oscilador harmónico

Sistema constituído por um ponto que se desloca sobre uma reta numérica em dado intervalo de tempo I, de tal forma que a respetiva abcissa é dada em função do tempo $t \in I$, por

$x(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$, $A > 0$, $\omega > 0$ e $\varphi \in [0, 2\pi[$

As constantes A, ω e φ denominam-se **amplitude**, **pulsação** e **fase**, respetivamente.

A função x é periódica de período $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$

e o inverso numérico do período $f = \dfrac{1}{T}$

denomina-se **frequência do oscilador harmónico**.

Primitivas

Dada uma função f, real de variável real, definida em I, F diz-se uma função primitiva de f em I se

$$\forall\, x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

Funções de referência para primitivação

(Primitivas imediatas)

Sejam $c \in \mathbb{R}$ e $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{-1, 0\}$, tem-se que:

$(x)' = 1$	$P\,1 = x + c$
$(x^{\alpha})' = \alpha x^{\alpha - 1}$	$P\,x^{\alpha} = \dfrac{1}{\alpha + 1}x^{\alpha + 1} + c$
$(e^x)' = e^x$	$P\,e^x = e^x + c$
$(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$	$P\left(\dfrac{1}{x}\right) = \ln x + c$ (em $\mathbb{R}^+$)
$(\sin x)' = \cos x$	$P\cos x = \sin x + c$
$(\cos x)' = -\sin x$	$P\sin x = -\cos x + c$

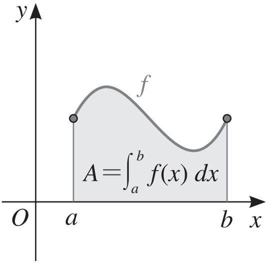
Linearidade da primitivação

Sejam f e g funções reais de variável real e $k \in \mathbb{R}$, tem-se que:

$$P(f+g) = Pf + Pg$$
$$P\,kf = kPf$$

Integrais

Dados um referencial cartesiano xOy e uma função f contínua num intervalo fechado $[a, b]$, designa-se por integral de f entre a e b e representa-se por $\int_a^b f(x)dx$:



- A área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f, se f é não negativo no intervalo $[a, b]$;

- O simétrico da medida da área da região do plano delimitada pelas retas de equação $x = a$ e $x = b$, o eixo das abcissas e o gráfico de f, se f é não positiva no intervalo $[a, b]$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b -f(x)dx$$

- A soma
$$\int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)dx\ ,$$
se f é tal que existe $k \in \mathbb{N}_0$ e $c_0, c_1, \ldots, c_{k+1}$, com $a = c_0 < c_1 < \ldots < c_{k+1} = b$, tal que f é não negativa ou não positiva em cada intervalo $[c_j, c_{j+1}]$ $(0 \leqslant j \leqslant k)$, ou seja,

$$\int_a^b f(x)dx =$$

$$= \int_a^{c_1} f(x)dx + \int_{c_1}^{c_2} f(x)dx + \ldots + \int_{c_k}^{b} f(x)$$

Propriedades

Dadas duas funções f e g contínuas num intervalo $[a, b]$, $c \in [a, b]$ e $k \in \mathbb{R}$, tem-se:

Fórmula de Barrow

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

(F é uma primitiva qualquer de f no intervalo $[a, b]$)

Simetria

$$\int_b^a f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx$$

Relação de Chasles

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Linearidade

$$\int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \ ;$$

$$\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$$

Conjugado de $z = a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$

$$\bar{z} = a - bi$$

Operações na forma $a + bi$ com $a, b \in \mathbb{R}$

Sejam $z_1 = a + bi$ e $z_2 = c + di$

- $z_1 + z_2 = a + c + (b + d)i$
- $z_1 \times z_2 = ac - bd + (ad + bc)i$
- $\dfrac{z_2}{z_1} = \dfrac{z_2\overline{z_1}}{|z_1|^2} = \dfrac{ac + bd}{a^2 + b^2} + \dfrac{ad - bc}{a^2 + b^2}i$

Módulo de um número complexo

$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + b^2}$$

Forma trigonométrica de um número complexo

$$z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta) = |z|\,e^{i\theta}$$

em que θ é tal que

$$\cos\theta = \frac{\mathrm{Re}(z)}{|z|} \text{ e } \sin\theta = \frac{\mathrm{Im}(z)}{|z|}$$

Produto e quociente na forma trigonométrica

Sejam $z_1 = |z_1| e^{i\alpha}$ e $z_2 = |z_2| e^{i\beta}$

- $z_1 z_2 = |z_1||z_2| e^{i(\alpha + \beta)}$
- $\dfrac{z_1}{z_2} = \dfrac{|z_1|}{|z_2|} e^{i(\alpha - \beta)}$

Potência de expoente natural

Seja $z = |z| e^{i\theta}$ e $n \in \mathbb{N}$

$$z^n = |z|^n e^{in\theta}$$

Raízes índice $n \in \mathbb{N}$ de um número complexo

As n raízes índice n de um complexo w são

$$z_k = \sqrt[n]{|w|}\, e^{i\left(\frac{\alpha}{n} + \frac{2\pi k}{n}\right)},\ k = 0, 1, \ldots, n - 1$$

Conjuntos definidos por condições

Sejam $z_0 = a + bi$, $z_1 = c + di$, $r \in \mathbb{R}^+$ e $\theta \in]-\pi, \pi]$

- Circunferência de centro em (a, b) e raio r

$$|z - z_0| = r$$

- Círculo de centro em (a, b) e raio r

$$|z - z_0| \leqslant r$$

- Exterior da circunferência de centro em (a, b) e raio r

$$|z - z_0| > r$$

- Mediatriz do segmento de reta de extremos em (a, b) e (c, d)

$$|z - z_0| = |z - z_1|$$

- Semiplano delimitado pela mediatriz do segmento de reta de extremos em (a, b) e (c, d) que contém o ponto (a, b)

$$|z - z_0| < |z - z_1|$$

- Lado extremidade do ângulo orientado de vértice em (a, b) e lado origem diretamente paralelo ao semieixo real positivo

$$Arg(z - z_0) = \theta$$